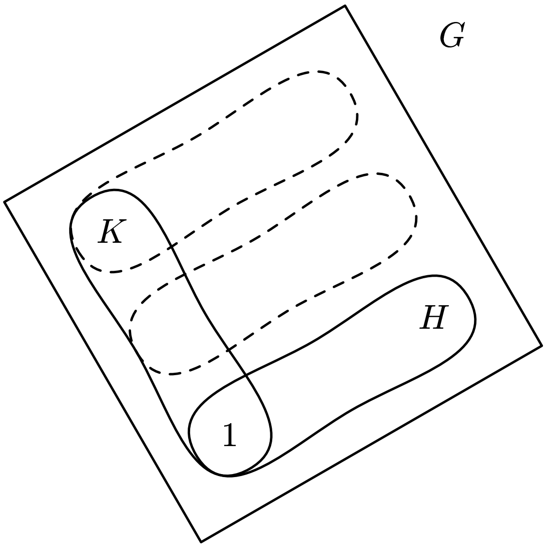
PROPRIÉTÉS DE TREILLIS POUR LES GROUPES DE COXETER ET LES SYSTÈMES LDI

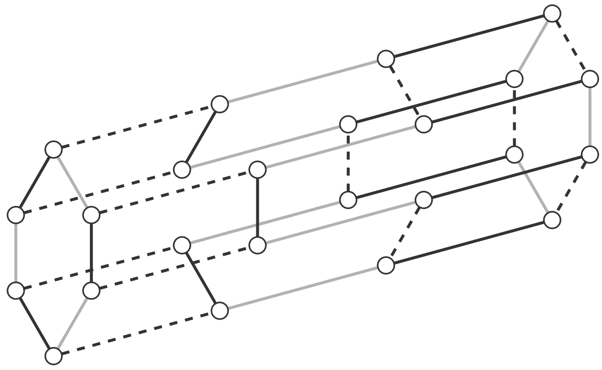
Přemysl Jedlička

Soutenance de la thèse le 24 juin 2004 à Caen

1 Produits de treillis

Le produit semi-direct dans un groupe G est déterminé par un sous-groupe K et un sous-groupe distingué H satisfaisants $KH = G$ et $K \cap H = \{1\}$.





Le treillis de l'ordre faible du groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$.

Définition : Soit L un treillis et soit θ une congruence sur L. On dit que la congruence θ sur L est *isoforme* si les classes de θ sont des sous-treillis deux à deux isomorphes.

On définit le produit semi-direct de treillis en utilisant deux applications, φ et ψ, définies comme

$$(k,h) \vee (k \vee k', 0_H) = (k \vee k', \varphi(k,k')(h)),$$
$$(k,h) \wedge (k \wedge k', 1_H) = (k \wedge k', \psi(k,k')(h)).$$

Ensuite, les opérations de treillis sont définies comme

$$(k_1,h_1) \vee (k_2,h_2) = (k_1 \vee k_2,\, \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)),$$
$$(k_1,h_1) \wedge (k_2,h_2) = (k_1 \wedge k_2,\, \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)),$$

Proposition : *Soient K, H deux treillis et soient $\varphi, \psi : K \times K \to H^H$ deux applications satisfaisant les conditions*

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,k} &= \psi_{k,k} = \mathsf{id}_H, \\
\varphi_{k,k' \vee k''} &= \varphi_{k \vee k', k''} \circ \varphi_{k,k'}, \\
\psi_{k,k' \wedge k''} &= \psi_{k \wedge k', k''} \circ \psi_{k,k'}, \\
h &\leqslant \psi_{k,k \wedge k'} \circ \varphi_{k \wedge k', k}\,(h), \\
h &\geqslant \varphi_{k,k \vee k'} \circ \psi_{k \vee k', k}\,(h), \\
\varphi_{k,k'}(h \vee h') &= \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h'), \\
\psi_{k,k'}(h \wedge h') &= \psi_{k,k'}(h) \wedge \psi_{k,k'}(h').
\end{aligned}$$

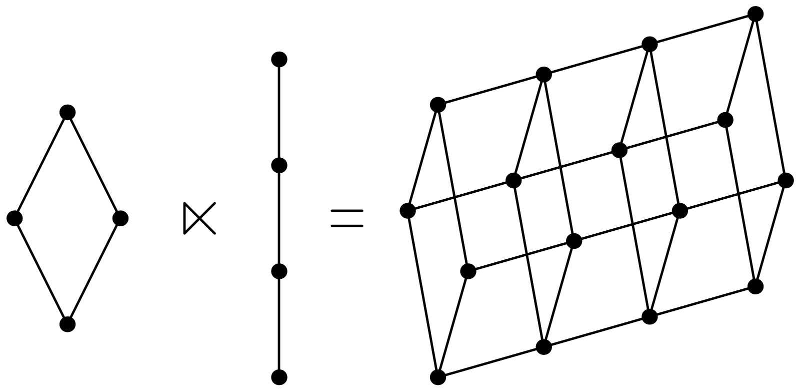
Alors l'ensemble $K \times H$ avec les deux opérations $\vee$, $\wedge$, définies par

$$\begin{aligned}
(k_1, h_1) \vee (k_2, h_2) &= (k_1 \vee k_2,\ \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)), \\
(k_1, h_1) \wedge (k_2, h_2) &= (k_1 \wedge k_2,\ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)),
\end{aligned}$$

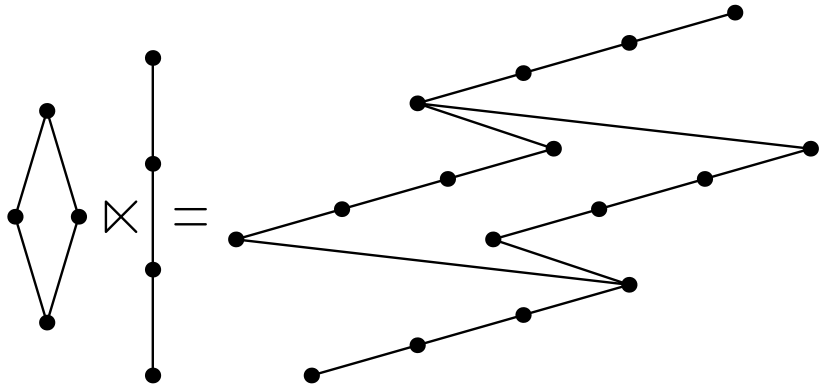
forme un treillis.

Définition : Le treillis construit dans la proposition est appelé un *produit semi-direct* des treillis K et H, et noté $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$.

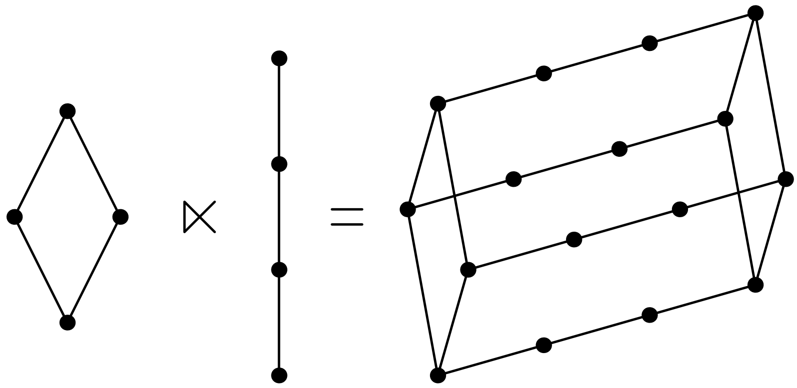
Soient K, H des treillis quelconques et soit $\varphi_{k,k'} = \psi_{k,k'} = \mathrm{id}_H$, pour tous k, k' dans K. Alors le produit semi-direct $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ est le produit direct $K \times H$.



Soient K, H des treillis quelconques et, pour chaque $k \leqslant k'$ et h dans H, soient $\varphi_{k,k'}(h) = 0_H$, $\psi_{k',k}(h) = 1_H$. Alors on a $(k,h) \leqslant (k',h')$ si et seulement si on a $k < k'$ dans K ou $k = k'$ et $h \leqslant h'$ dans H. Par conséquent, le produit semi-direct de K et H consiste en $|K|$ copies du treillis H arrangées dans la forme du treillis K.



Soient K, H des treillis arbitraires et, pour chaque $k \leqslant k'$, soient $\varphi_{k,k'}(h) = 1_H$, pour $h > 0_H$, et $\psi_{k',k}(h) = 0_H$, pour $h < 1_H$. Dans ce cas là, si K possède au moins 2 éléments et H possède au moins 3 éléments, le treillis $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ est non modulaire.



On utilise la même idée pour définir le produit semi-direct de demi-treillis et on étudie certaines propriétés de ce produit.

Proposition : *Soient K, H deux sup-demi-treillis et soit φ une application de $K \times K$ à $\mathrm{End}(H)$ qui satisfait $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pour tous k dans K, et la condition*

$$\varphi_{k,k'}(h \vee h') = \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h').$$

Alors l'ensemble $K \times H$ muni de l'ordre $\leqslant$ défini comme

$$(k,h) \leqslant (k',h') \Longleftrightarrow (k \leqslant k') \text{ et } (\varphi_{k,k'}(h) \leqslant h')$$

est un sup-demi-treillis.

Le produit semi-direct des demi-treillis est noté de analogiquement comme le produit semi-direct des treillis, c'est-à-dire, $K \times^{\varphi} H$ pour des sup-demi-treillis et $K \times_{\psi} H$ pour des inf-demi-treillis.

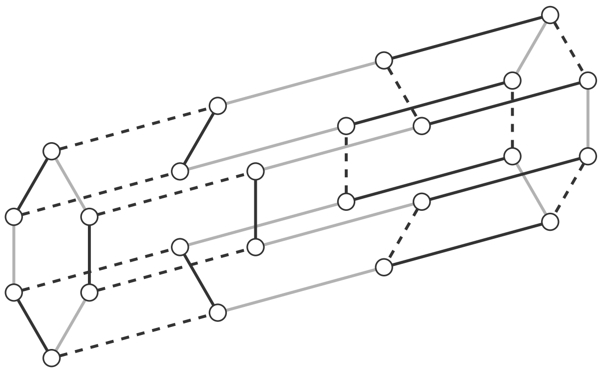
Définition : Un *graphe de Coxeter* $\Gamma = (S, A)$ est un graphe fini non-orienté dont chaque arête (s,t) de A est étiquetée par un nombre $m_{s,t}$ de l'ensemble $\{3, 4, \ldots, \infty\}$. On dit qu'un groupe W est un *groupe de Coxeter* associé au graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$ s'il admet la présentation

$$\begin{aligned}\langle\, S;\ s^2 = 1, (st)^2 = 1 &\quad \text{pour } (s,t) \notin A,\\ (st)^{m_{s,t}} = 1, &\quad \text{pour } (s,t) \in A \text{ et } m_{s,t} < \infty \,\rangle.\end{aligned}$$

On dit qu'une paire (W, S) est un *système de Coxeter* si W est un groupe et s'il existe un graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$ auquel le groupe W est associé. Pour chaque élément g de W, on définit la *longueur* $\ell(g)$ comme la longueur minimale d'une suite $s_1, s_2, \ldots, s_k$, avec s_i dans S, satisfaisante $g = s_1 s_2 \cdots s_k$.

Définition : Soit W un groupe de Coxeter. Pour g, h dans W, on écrit $g \preccurlyeq h$ si et seulement si on a $\ell(g) + \ell(g^{-1}h) = \ell(h)$. Cette relation est appelée l'*ordre faible* du groupe W.

Proposition : *Soit W un groupe de Coxeter. Alors l'ensemble $(W, \preccurlyeq)$ est un inf-demi-treillis et l'élément 1 est son plus petit élément. Si W est fini alors $(W, \preccurlyeq)$ est un treillis.*



Le treillis de l'ordre faible du groupe symetrique $\mathfrak{S}_4$.

Soit W un groupe de Coxeter associé à un graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$. Soit J un sous-ensemble de S. Alors le sous-groupe engendré par J est un groupe de Coxeter associé au sous-graphe de Γ engendré par J. Ce sous-groupe est noté W_J et appelé un *sous-groupe parabolique standard* de W engendré par J.

Définition : Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. On dit qu'un élément g de W est *J-réduit* si on a $\ell(sg) = \ell(g) + 1$, pour chaque s dans J. On note W^J l'ensemble de tous les mots J-réduits dans W.

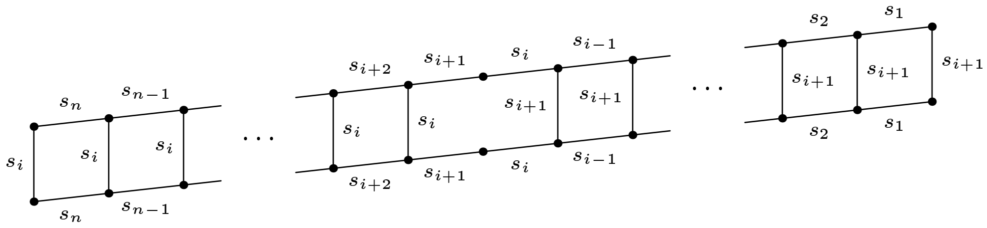
Lemme : *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Il existe uniques applications $\alpha_J : W \to W_J$ et $\omega_J : W \to W^J$ telles que l'on a $g = \alpha_J(g)\omega_J(g)$ pour chaque g dans W.*

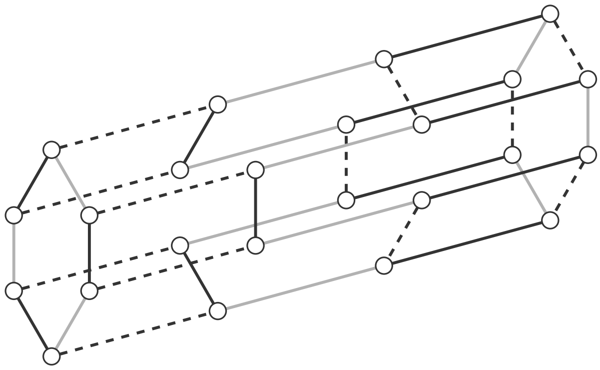
Lemme : *On a $\alpha_J(g \wedge h) = \alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)$. Si $g \vee h$ existe, alors $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)$ existe et on a $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h) = \alpha_J(g \vee h)$.*

Theorème : *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Alors l'inf-demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe à un produit semi-direct des demi-treillis $(W_J, \preccurlyeq)$ et $(W^J, \preccurlyeq)$.*

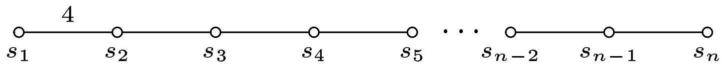
Theorème : *Soit (W, S) un système de Coxeter tel que W est fini et soit J une partie de S. Alors le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe à un produit semi-direct des treillis $(W_J, \preccurlyeq)$ et $(W^J, \preccurlyeq)$.*

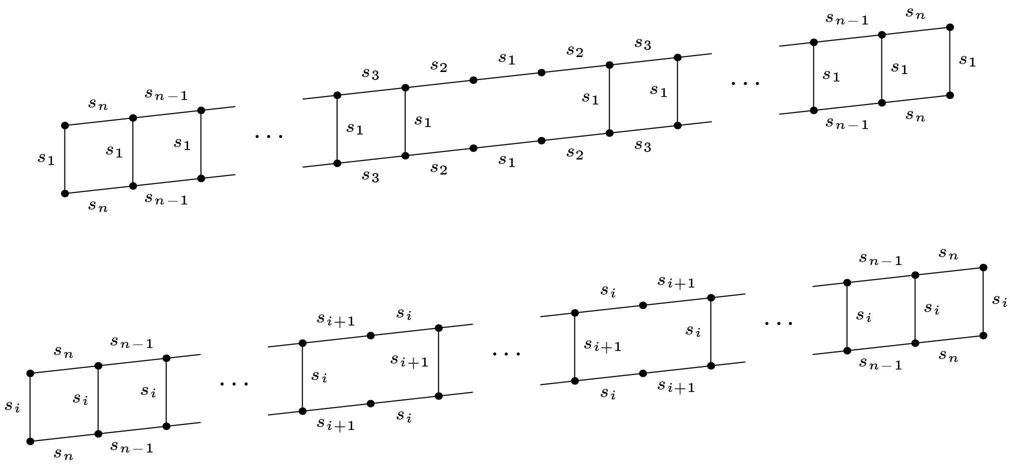
La construction pour le groupe de type A_n :



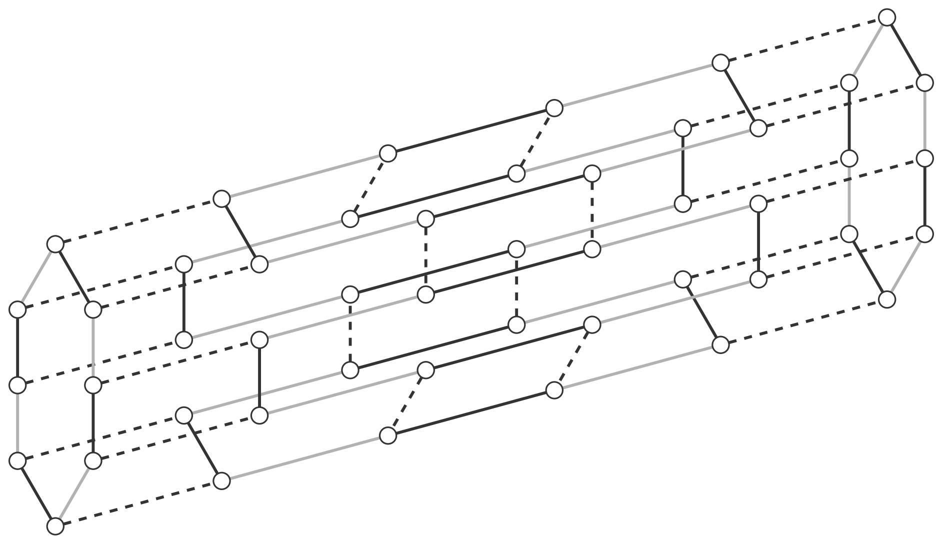


La construction pour le groupe de type B_n :

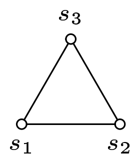


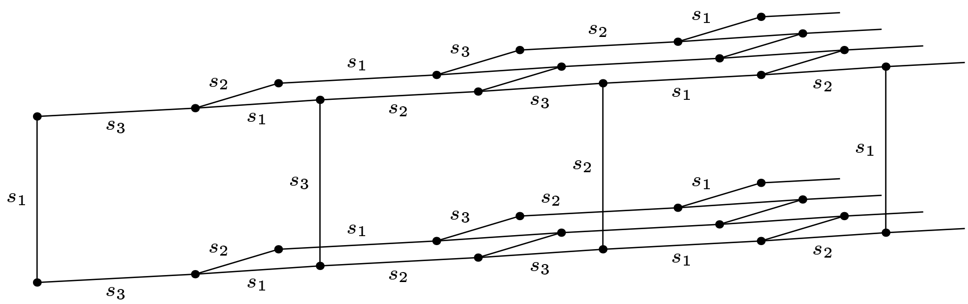


Le graphe de Cayley du groupe de Coxeter de type B_3 :

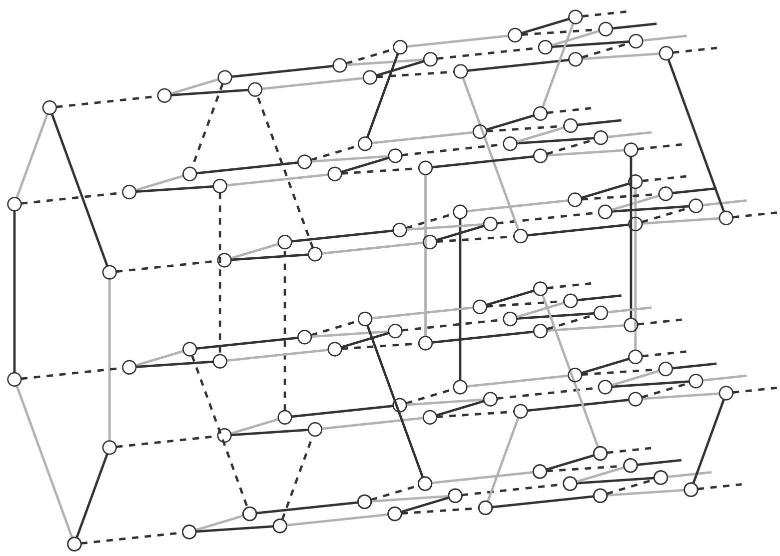


La construction pour le groupe de type $\tilde{A}_2$:





Le graphe de Cayley du groupe de Coxeter de type $\tilde{A}_2$:



Définition : Soit $\Gamma = (\Sigma, A)$ un graphe de Coxeter. Le *groupe d'Artin-Tits* associé à Γ est le groupe présenté par la présentation de groupe

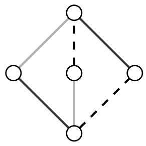
$$\langle\, \Sigma;\ [\sigma,\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}} = [\tau,\sigma\rangle^{m_{\sigma,\tau}} \quad \text{pour } m_{\sigma,\tau} < \infty \,\rangle.$$

Le *monoïde d'Artin-Tits* associé à Γ est le monoïde présenté par la même présentation comme monoïde. Un groupe ou un monoïde d'Artin-Tits est dit *de type sphérique* si le graphe de Coxeter associé définit un groupe de Coxeter fini. On dit qu'un groupe ou un monoïde d'Artin-Tits est *irréductible* si son graphe de Coxeter connexe.

Dans chaque monoïde d'Artin-Tits de type sphérique il existe un élément important Δ appelé *l'élément de Garside minimal*, dont les diviseurs à gauche coïncident avec les diviseurs à droite et cet ensemble engendre tout le monoïde. Les diviseurs de Δ ordonnés par divisibilité correspondent aux éléments du groupe de Coxeter associé ordonnés par l'ordre faible.

Proposition : *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique, irréductible, avec au moins deux atomes. Alors le treillis de divisibilité dans M est simple.*

Définition : Un monoïde M est appelé *monoïde de Garside* s'il satisfait les quatre conditions suivantes :
(i) Le monoïde M est atomique avec un nombre fini d'atomes.
(ii) Le monoïde M est simplifiable.
(iii) Chaque paire d'éléments de M admet un ppcm à droite et à gauche.
(iv) Il existe un élément de Garside dans M.



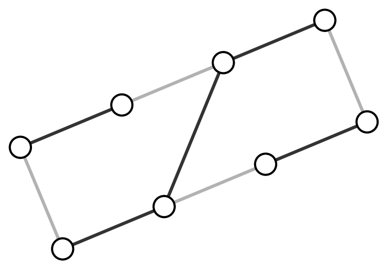
Le graphe caractéristique du monoïde B_3^{BKL+} de Birman, Ko et Lee donné par la présentation $\langle a, b, c;\ ab = bc = ca \rangle$. L'élément de Garside minimal est l'élément ab.

Définition : Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit δ un élément équilibré qui divise Δ. Notons M_δ le monoïde engendré par l'ensemble de diviseur de δ, noté $M(\delta)$. Si on a $M(\delta) = M(\Delta) \cap M_\delta$, alors le monoïde M_δ est appelé *sous-monoïde parabolique* de M.

Définition : Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. On dit qu'un élément a de $M(\Delta)$ est δ-*réduit* si on a $a \wedge \delta = 1$. L'ensemble de tous les éléments δ-réduits est noté M^δ. On note d_δ le plus grand élément de M^δ si un tel élément existe.

Théorème : *Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. Supposons que l'élément d_δ existe et que l'on a $\Delta = \delta d_\delta$. Alors, l'ensemble M^δ est un treillis et le treillis $M(\Delta)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $M(\delta)$ et M^δ.*

$$M = \langle x, y;\ xyx = y^2 \rangle$$



2 Systèmes distributifs à gauche idempotents

Auto-distributivité à gauche (LD) :

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$$

Idempotence (I) :

$$x \cdot x = x$$

Idempotence à gauche (LI) :

$$(x \cdot x) \cdot y = x \cdot y$$

Méthodes qui permettent de dire que deux termes t et t' ne sont pas LDI-équivalents :

- sémantiques : trouver un modèle où t et t' s'évaluent différemment ;
- syntactiques : méthodes utilisantes uniquement des propriétés de termes
  - regarder les variables : deux termes LDI-équivalents ont les mêmes variables la plus à gauche et la plus à droite
  - associer un poids : on chosit un nombre p entre 0 et 1 et des nombres w_x, pour chaque variable x, et et on définit le poids d'un terme s comme

$$w(s) = \begin{cases} w_x & \text{pour } s = x, \text{ une variable,} \\ p \cdot w(s_1) + (1-p) \cdot w(s_2) & \text{pour } s = s_1 \cdot s_2. \end{cases}$$

  - méthodes ad hoc

Expansions :

LD-expansion de base :

$$t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \xrightarrow{\mathsf{LD}} (t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)$$

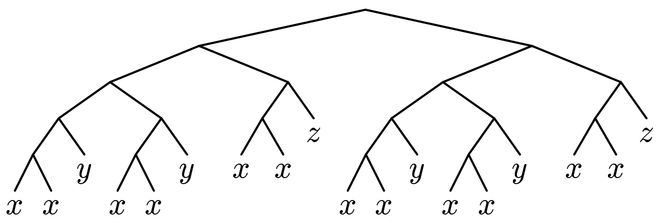
I-expansion de base :

$$t_1 \xrightarrow{\mathsf{I}} t_1 \cdot t_1$$

LI-expansion de base :

$$t_1 \cdot t_2 \xrightarrow{\mathsf{LI}} (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$$

Pour chaque terme t on définit $\partial_{\text{LDI}} t$ et $\partial_{\text{LDLI}} t$. Le terme $\partial_{\text{LDI}}\, x \cdot (y \cdot z)$ est

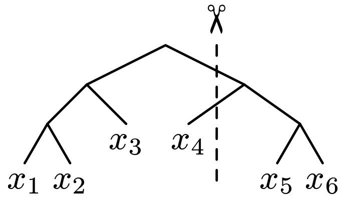


Proposition : *Soient t, t' deux termes. Si t' est une LDI-expansion de base de t alors $\partial_{\text{LDI}} t$ est une LDI-expansion de t'.*

Proposition : *Si deux termes t et t' sont LDI-équivalents, alors il existe un terme t'' avec $t \xrightarrow{\text{LDI}} t''$ et $t' \xrightarrow{\text{LDI}} t''$.*

Définition : Pour un terme t on définit la *coupure de t en α* comme le terme $\mathsf{cut}(t, \alpha)$ par récurrence :

$$\mathsf{cut}(t, \alpha) = \begin{cases} t & \text{pour } \alpha = \varnothing, \\ \mathsf{cut}(t_1, \beta) & \text{pour } \alpha = 0\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2, \\ t_1 \cdot \mathsf{cut}(t_2, \beta) & \text{pour } \alpha = 1\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases}$$



Proposition : *Soit t' un terme LDI-équivalent à un terme t. Alors chaque coupure de t' appartient au sous-système engendré par toutes les coupures de t.*

Corollaire : *Définissons le poids $w(t)$ d'un terme t sur $\{x, y\}$ comme suit :*

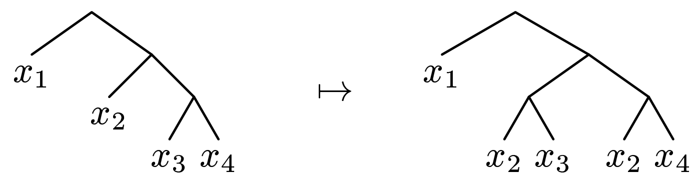
$$w(x) = 1, \qquad w(y) = -1, \qquad w(t_1 \cdot t_2) = (w(t_1) + w(t_2))/2$$

Alors chaque terme t' qui est LDI-équivalent au terme $x \cdot y$ satisfait l'inégalité $w(\mathrm{cut}(t', \alpha)) \geqslant 0$, pour chaque adresse α.

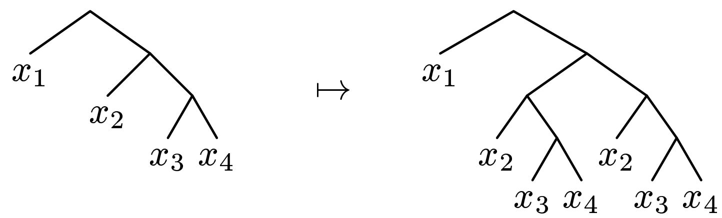
Exemple : Supposons $t = (x \cdot (x \cdot y)) \cdot ((y \cdot x) \cdot y)$. Quelque soit le poids w' considéré, on a $w'(t) = w'(x \cdot y)$. Pourtant, la coupure de t' en 100 est le terme $((x \cdot x) \cdot y) \cdot y$ et on a $w(((x \cdot x) \cdot y) \cdot y) = -1/4$. Donc, d'après le corollaire, le terme t ne peut pas être LDI-équivalent au terme $x \cdot y$.

On définit le monoïde géométrique de LDI comme le monoïde engendré par les expansions.

D_1 :



I_1 :



Le monoïde de géométrie satisfait les relations suivantes :

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1\beta} & = & \mathrm{D}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} & \quad & \mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1\beta} & = & \mathrm{D}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \\
\mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 1\beta} & = & \mathrm{I}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} & & \mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 1\beta} & = & \mathrm{I}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \\
\mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 00\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 10\alpha} & & \mathrm{D}_{\gamma 10\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 01\alpha} \\
\mathrm{D}_{\gamma 11\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 11\alpha} & & \mathrm{D}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \\
\mathrm{I}_{\gamma\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma} & = & \mathrm{I}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 1\alpha} & & \mathrm{D}_{\gamma\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma} & = & \mathrm{I}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1\alpha} \\
\mathrm{I}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 00\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 10\alpha} & & \mathrm{I}_{\gamma 10\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 01\alpha} \\
\mathrm{I}_{\gamma 10} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 0} & & \mathrm{I}_{\gamma 11\alpha} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 11\alpha} \\
\mathrm{I}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 0} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma} & & \mathrm{DI}_{\gamma\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{DI}_{\gamma\alpha} \cdot \mathrm{I}_{\gamma} \\
\mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 11} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1} & = & \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{I}_{\gamma 1} & & \mathrm{I}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{DI}_{\gamma 1\alpha} & = & \mathrm{I}_{\gamma} \cdot \mathrm{DI}_{\gamma 1\alpha} \\
\mathrm{I}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & = & \mathrm{I}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} & & \mathrm{I}_{\gamma 1} \cdot \mathrm{D}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1} & = & \mathrm{I}_{\gamma} \cdot \mathrm{D}_{\gamma 1}
\end{array}
$$

Proposition : *Deux éléments quelconques du monoïde syntaxique de LDI, respectivement de LDLI, ont un multiple commun à droite.*

Proposition : *Le monoïde syntaxique de LDLI est simplifiable à gauche, la divisibilité à gauche y forme un treillis et son problème de mots et résoluble.*

La *hauteur à droite* d'un terme t est définie comme la longueur de la branche la plus à droite de t lorsque t est vu comme un arbre binaire.

Conjecture : *Deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite.*

Proposition : *Si deux termes t, t' sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite, alors les termes $t \cdot t$ et $t' \cdot t'$ sont LDLI-équivalents.*

Une solution du problème de mots pour LDLI donnerait donc une solution du problème de mots pour LDI.