Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur français Patrick Dehornoy pour avoir accepté de diriger mes études, pour ses conseils et aides, et surtout pour sa patience à corriger mes fautes de français et à rendre mes textes plus lisibles. Je voudrais aussi remercier mon directeur tchèque Aleš Drápal, pour avoir pu être son élève et pour tous ses conseils et remarques, pas seulement concernant cette thèse.

Je suis extrêmement reconnaissant envers Bruno Leclerc et Petr Němec qui ont accepté de lire et rapporter sur ma thèse Je voudrais aussi les remercier, de même que Tomáš Kepka et Friedrich Wehrung pour avoir accepté de faire partie du jury de ma soutenance.

Je voudrais en même temps remercier l'université de Caen et l'université Charles de Prague qui étaient mes bases d'enseignement pendant les trois années passées, de même que les autres organisations qui m'ont permis de faire mes études en co-tutelle en France et en Tchéquie.

Je voudrais aussi remercier tous les membres du LMNO à Caen, du département d'algèbre à Prague et des autres laboratoires qui m'ont invité à présenter mes résultats. Parmi ceux-ci, je voudrais surtout remercier Eddy Godelle, Marian Kechlibar, Tomáš Kepka, Bernard Leclerc, Claude Le Conte de Poly-Barbut, Matthieu Picantin, Hervé Sibert, David Stanovský, Philippe Toffin et Friedrich Wehrung pour leurs consultations, conseils et remarques pendant mes études doctorales.

Finalement, je voudrais remercier mon épouse Lucie qui m'a soutenu pendant toute la période et qui m'a donné l'espoir et l'énergie pour continuer à travailler.

Table des matières

Introduction **6**

I Produits de treillis 16

1 Produits semi-directs de treillis **18**

1.1 Produit semi-direct de treillis 18

1.2 Applications φ et ψ 36

1.3 Produit semi-direct de demi-treillis 42

1.4 Congruence arbitraire 46

1.5 Une classe de produits semi-directs 52

2 Construction de l'ordre faible des groupes de Coxeter **66**

2.1 L'ordre faible dans les groupes de Coxeter 66

2.2 Produits semi-directs dans les groupes de Coxeter 74

2.3 Exemples de groupes de Coxeter 84

3 Treillis de divisibilité **106**

3.1 Treillis de divisibilité dans les monoïdes d'Artin-Tits 106

3.2 Produits semi-directs dans les monoïdes de Garside 118

II Systèmes auto-distributifs idempotents 134

4 Identités LD, I, LI et leurs expansions **136**

4.1 Confluence des expansions 136

4.2 Termes comme arbres 150

4.3 Coupures d'un terme 154
4.4 La forme ∂-normale 168

5 Monoïdes de géométrie 184
5.1 LDI-opérateurs 184
5.2 Relations dans les monoïdes de géométrie 194
5.3 Relations syntaxiques 206
5.4 Monoïde syntaxique 222

6 Construction de LDLI-systèmes 238
6.1 Congruence idempotente sur des LDLI-systèmes 238
6.2 Décomposition de LDLI-systèmes 244
6.3 LDLI-systèmes libres 248

Bibliographie 256

Introduction

Ce texte comporte deux parties, à savoir l'etude des produits semi-directs de treillis avec des applications aux groupes de Coxeter et aux monoïdes de Garside, et celle des systèmes auto-distributifs idempotents libres (LDI-systèmes libres), dont les éléments sont des classes d'équivalence structurées comme des treillis. Le point commun reliant ces parties assez indépendantes est la notion de treillis et de confluence et, plus généralement, le type d'argument combinatoire et algébrique utilisé.

La première partie est centrée sur la notion de produit semi-direct de treillis, qui est l'analogue, dans le monde des treillis, du produit semi-direct des groupes. Comme dans le cas des groupes, il existe une version interne et une version externe du produit semi-direct de treillis, et celui-ci se construit en utilisant une action d'un des treillis sur l'autre, le produit direct correspondant au cas où l'action est triviale. Comme un treillis possède deux opérations de base (inf et sup), la construction du produit semi-direct requiert *a priori* deux applications du premier treillis dans les automorphismes du second. En fait, une application est suffisante pour déterminer l'ordre du produit et, par conséquent, pour déterminer la seconde application.

Le chapitre 1 de la thèse décrit la construction du produit semi-direct de treillis, ainsi que celle de produit semi-direct de demi-treillis (cas où une seule opération de treillis est définie). Plusieurs exemples sont analysés en détail. Le principal résultat en vue des développements ultérieurs est la proposition 1.15 qui montre que, pour déterminer un produit semi-direct de treillis discrets (donc en particulier de treillis finis), il suffit de savoir énumérer un ensemble de triplets dits spéciaux, qui codent en un certain sens la relation de successeur immédiat du produit. Un autre résultat est une caractérisation de la plus petite classe de treillis close par produit semi-direct :

Proposition 1.25 *Soit L un treillis fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) le treillis L appartient à la plus petite classe qui contient le treillis à deux éléments et qui est close par sous-treillis, produit semi-direct et images isomorphes ;
(ii) le treillis L ne contient aucun sous-treillis qui s'envoie sur un treillis simple ;
(iii) le treillis L appartient à la plus petite classe qui contient le treillis à deux éléments et qui est close par sous-treillis, par suite exacte courte et par image isomorphe ;
(iv) le treillis L appartient à la plus grande classe de treillis close par sous-treillis et par image homomorphe qui ne contient aucun treillis simple.

Le chapitre 2 décrit une application du produit semi-direct de treillis aux groupes de

Coxeter. Cette application est en fait le point de départ de tout le travail et la motivation principale pour laquelle le produit semi-direct général a été introduit. Les groupes de Coxeter sont une classe de groupes contenant les groupes symétriques et, plus généralement, les groupes de réflexions d'un espace affine, et ils ont fait l'objet de travaux multiples [27], [4] ou [5]. Tout groupe de Coxeter W est équipé d'une relation d'ordre partiel appelé *l'ordre faible* $\preccurlyeq$ [3], qui donne à W une structure de demi-treillis dans tous les cas, et de treillis dans le cas où W est fini. Notre but est de décrire une construction explicite de cette structure de (demi)-treillis, et c'est là que le produit semi-direct intervient. Parmi tous les sous-groupes d'un groupe de Coxeter, il existe des sous-groupes dits *paraboliques* qui sont eux-mêmes des groupes de Coxeter, et qui sont indexés par les parties de l'ensemble des générateurs canoniques de W. Si W_J est un sous-groupe parabolique de W, il existe une décomposition naturelle des éléments de W liée à W_J, et il se trouve que cette décomposition donne une congruence du (demi)-treillis de l'ordre faible sur W. De plus, les classes de cette congruence sont deux à deux isomorphes et elles ont elles-mêmes une structure de (demi)-treillis. Nous montrons le résultat général suivant :

Théorème 2.10 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. On note W_J le sous-groupe engendré par J et W^J une classe à gauche associée à W_J. Alors le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe à un produit semi-direct des demi-treillis $(W_J, \preccurlyeq)$ et $(W^J, \preccurlyeq)$.*

De plus, le résultat précédent est effectif dans la mesure où nous pouvons, dans un grand nombre d'exemples, décrire complètement les produits semi-directs mis en jeu, en énumérant exhaustivement les triplets spéciaux. Nous traitons ainsi les cas des types A_n, B_n, D_n, I_m, ainsi que celui de $\widetilde{A}_2$: pour chacune des familles infinies, le treillis de l'ordre faible est construit inductivement à partir de celui du groupe précédent de la famille.

D'autres résultats de décomposition existent dans la littérature [41], [23]. La spécificité de notre résultat est de permettre une construction inductive (construire le gros treillis en partant des petits treillis, ces derniers étant seuls connus) et pas seulement une décomposition (exprimer les éléments du gros treillis, supposés connus, en termes de ceux des petits treillis). De plus, il semble que seul le cas des groupes de Coxeter finis avait été considéré, alors que notre approche s'applique également au cas infini.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude du treillis de la divisibilité dans les groupes de Garside. À tout groupe de Coxeter est associé un groupe dit d'Artin, ou d'Artin-Tits, dont la présentation s'obtient à partir de la présentation standard du groupe de Coxeter en retirant les relations de torsion $s^2 = 1$, et un monoïde de même présentation. Si W est un groupe de Coxeter fini, et si M est le monoïde d'Artin-Tits correspondant, il existe par construction un homomorphisme surjectif de M sur W, et il existe aussi une section ensembliste canonique de cet homomorphisme. L'image par cette section de l'élément maximal w_0 de W est un élément Δ de M dont les propriétés sont importantes, et, en particulier, les diviseurs de Δ au sens du monoïde M forment un treillis isomorphe au treillis de l'ordre faible sur W. Nous étudions ici les treillis qui apparaissent comme les treillis des diviseurs des éléments Δ^k ainsi que le treillis de divisibilité du monoïde M :

Prpoposition 3.11 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique, irréductible, avec au moins deux atomes. Alors le treillis de divisibilité de M est simple.*

La notion de monoïde d'Artin-Tits se généralise aux monoïdes de Garside définis comme des monoïdes possédant un élément appelé *élément de Garside* dont les diviseurs

forment un treillis [17]. On décrit des exemples de monoïdes de Garside M où le treillis de diviseurs de l'élément de Garside minimal Δ de M s'obtient comme produit semi-direct du treillis des diviseurs de l'élément de Garside minimal δ d'un sous-monoïde de M et du treillis de diviseurs de Δ qui sont premiers à δ.

La seconde partie de la thèse est consacrée à l'étude de l'auto-distributivité en présence de l'idempotence. L'auto-distributivité est l'identité algébrique LD: $x(yz) = (xy)(xz)$, et l'idempotence est l'identité algébrique I: $x = xx$. Les LD-systèmes, c'est-à-dire les systèmes algébriques formés d'un ensemble muni d'une opération satisfaisant à l'identité LD, ont été beaucoup étudiés dans les années récentes, par exemple par Dehornoy [13], Drápal [19], Kepka [34] ou Laver [39]. Un *LDI-système* est un LD-système qui satisfait en plus l'identité I. Le premier problème, lorsqu'on considère une identité algébrique, ou une famille d'identités algébriques, est le *problème de mots*, défini comme le problème de décider algorithmiquement si deux expressions abstraites écrites avec des variables et une opération (on dit simplement deux *termes*) sont ou non égales *modulo* les identités considérées. Résoudre ce problème revient à décrire explicitement les structures libres de la variété équationnelle définie par les identités.

Dans le cas de l'identité LD, la question a été résolue positivement dans [12], et il existe désormais plusieurs méthodes pour reconnaître si deux termes sont ou non LD-équivalents. Dans le cas de LDI, c'est-à-dire lorsqu'on ajoute l'idempotence à l'auto-distributivité, la question est ouverte — et elle le reste. Les résultats établis dans cette thèse peuvent être vus comme des résultats partiels en direction d'une solution du problème de mot de LDI, qui reste à trouver.

Le chapitre 4 introduit des notions de base nécessaires à l'étude de LDI, c'est-à-dire à la description de la relation d'équivalence sur les termes induite par les identités LD et I. L'idée directrice est de suivre les méthodes développées dans [12] pour le cas de LD, et de chercher à les étendre au cas de LDI — ce qui n'est *pas* une tâche immédiate. Il apparaît naturel d'introduire une variante de l'idempotence, à savoir l'identité LI: $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot y$, et de mener parallèlement l'étude pour LDI et pour LDLI.

Un des résultats connus pour LD est que chaque classe de LD-équivalence a une structure de type treillis (qu'il s'agisse d'un véritable treillis reste une conjecture dans le cas général) : on introduit une notion orientée de *LD-expansion* raffinant la LD-équivalence, et un des résultats techniques principaux est le résultat de *confluence* qui affirme que deux termes sont LD-équivalents si et seulement si ils ont une LD-expansion commune. Ce résultat a été montré également dans le cas de LDI par Larue dans [38]. Nous reprenons cette preuve ici et nous montrons un résultat analogue pour LDLI :

Proposition 4.12 *Deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement si ils ont une LDLI-expansion commune.*

Le problème pour résoudre le problème de mots d'une famille d'identités, par exemple LDI ou LDLI, est de savoir montrer que des termes ne sont *pas* équivalents : en effet, si deux termes sont équivalents, on peut toujours l'établir en énumérant systématiquement tous les termes équivalents au premier et regardant si le second apparaît dans la liste. Il existe deux méthodes pour montrer que des termes t, t' ne sont pas équivalents : la méthode sémantique consistant à construire un exemple d'un système S satisfaisant aux

identités considérées et tel que t et t' aient des évaluations différentes dans S, et la méthode syntaxique, qui consiste à trouver des critères purement formels montrant que t et t' ne peuvent pas être équivalents. Par exemple, dans le cas de LDI, les deux identités LD et I conservent la variable la plus à droite et la variable la plus à gauche et, par conséquent, si les variables de gauche ou les variables de droite dans t et t' ne coïncident pas, il est impossible que t et t' soient LDI-équivalents. Ce qu'on souhaiterait, c'est définir des critères suffisamment fins pour séparer tous les termes non équivalents, et cela serait résoudre le problème de mot. Dans le cas de LDI (et de LDLI), nous n'avons pas de tel critère, mais nous démontrons un résultat partiel permettant de séparer syntaxiquement des termes qu'on ne savait pas séparer jusqu'à présent. L'énoncé met en jeu une certaine notion de *coupure* d'un terme.

Théorème 4.29 *Si deux termes t, t' sont LDI-équivalents, toute coupure de t' appartient à l'ensemble* $\mathrm{Cut}(t)$.

Nous donnons des exemples non-triviaux d'application de ce critère mettant en jeu une notion de poids sur les variables d'un terme.

Dans le chapitre 5, nous étudions le monoïde de géométrie des identités LDI et LDLI. Pour chaque famille d'identités algébriques, il existe un monoïde qui décrit la relation d'équivalence associée sur les termes comme des orbites sous l'action d'un certain monoïde d'opérateurs [15]. Dans le cas de l'associativté, on obtient (essentiellement) le groupe F de R. Thompson [10], et dans celui de l'associativité et de la commutativité, on obtient (essentiellement) le groupe V de R. Thompson [7]. Dans le cas de l'auto-distributivité LD, le monoïde de géométrie est une extension du groupe d'Artin B_∞, et c'est l'étude de ce monoïde qui a permis de résoudre le problème de mots de LD et plusieurs questions connexes [12]. Il est donc naturel d'étudier de même les monoïdes de géométrie des familles d'identités LDI et LDLI, en particulier dans l'espoir de résoudre les problèmes de mots. Dans le cas de LD, la solution comporte quatre étapes, à savoir l'introduction du monoïde syntaxique – un monoïde qui vérifie les principales relations du monoïde géométrie ; la démonstration de la confluence dans ce monoïde syntaxique, ce qui revient à montrer que tout élément du groupe de fractions du monoïde syntaxique s'écrit sous la forme uv^{-1} où u et v appartiennent au monoïde ; la résolution du problème de mots du monoïde syntaxique ; et la construction d'une application injective des classes de LD-équivalence dans le groupe syntaxique. On réussit a compléter le deux premières étapes de cette approche pour le cas de LDI et les trois premières étapes pour le cas de LDLI. Le résultats principaux de ce chapitre sont

Proposition 5.41 *Chaque élément du groupe de fraction du monoïde syntaxique de LDI (respectivement de LDLI) s'écrit comme uv^{-1} où u et v appartiennent au monoïde syntaxique positif de LDI (respectivement LDLI).*

Proposition 5.46 *Le monoïde syntaxique de LDLI est simplifiable, chaque couple d'élément admet un plus petit multiple commun à droite et un plus petit grand diviseur commun à gauche et le problème de mots de ce monoïde est résoluble par retournement de mots.*

Le chapitre 6 contient des résultats sur les LDLI-systèmes, c'est-à-dire les systèmes algébriques satisfaisant à la fois LD et LI. On décrit une décomposition des LDLI-systèmes

qui permet de reconstruire les LDLI-systèmes à partir des LDI-systèmes et des systèmes constants à droite, c'est-à-dire, des systèmes qui satisfont l'identité $x \cdot z = y \cdot z$. On utilise cette construction pour construire les LDLI-systèmes libres à partir des LDI-systèmes libres et on en déduit les résultat équivalents au résultat disant que deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement si ils sont LDI-équivalents et ont la même hauteur droite, celle-ci référant à la longueur de la branche la plus à droite lorsque les termes sont vus comme des arbres binaires.

Si le résultat précedent est vrai, alors une solution au problème de mots de LDLI donnerait une solution au problème de mots pour LDI, et inversement. Une autre application est est que la variété équationnelle engendrée par LDLI serait la plus petite variété incluant à la fois la variété engendrée par LDI et celle engendrée par l'identité $x \cdot z = y \cdot z$.

Certains résultats présentés dans cette thèse ont été déjà publiés séparément. La définition du produit semi-direct de treillis fait une partie du mémoire de DEA de l'auteur [28]. L'article [29] contient, à peu près, tout le chapitre 1 de la thèse. L'article [31] décrit la construction de l'ordre faible des groupes de Coxeter en utilisant le produit semi-direct de demi-treillis. Et l'article [30] reprend, à peu près, tout le chapitre 6.

Première partie

Produits de treillis

Chapitre 1

Produits semi-directs de treillis

Le produit semi-direct de treillis est une construction inspirée par le produit semi-direct de groupes. Dans un sens, un treillis, obtenu comme produit semi-direct de deux treillis plus petits, possède une congruence canonique qui permet de retrouver les deux treillis de départ, l'un comme quotient et l'autre comme classe d'équivalence. Dans l'autre direction, presque tous les treillis possédant une congruence dont les classes sont deux à deux isomorphes se construisent comme produits semi-directs du quotient et d'une classe par rapport à la congruence.

Ce chapitre contient cinq sections. Dans la section 1, on définit le produit semi-direct de treillis utilisant deux fonctions pour coder les opérations de sup et d'inf. Dans la section 2, on étudie ces deux fonctions pour montrer que l'une est définie par l'autre et donc une seule suffit pour construire le produit semi-direct. Dans la section 3, on définit le produit semi-direct des demi-treillis. Dans la section 4, on montre qu'un treillis quelconque avec une congruence arbitraire θ se plonge dans un produit semi-direct dont la congruence canonique est une extension de la congruence θ. Enfin, dans la section 5, on étudie une classe de treillis finis close par produit semi-direct.

1.1 Produit semi-direct de treillis

Dans cette section on décrit la construction du produit semi-direct de treillis. Commençons par rappeler le cas du produit semi-direct des groupes : soit G un groupe avec K un sous-groupe et H un sous-groupe distingué qui satisfont $KH = G$ et $K \cap H = \emptyset$. On définit une application φ de K vers $\mathrm{Aut}(H)$, telle que l'ensemble $K \times H$ avec l'opération $\bullet$, définie comme

$$(k_1, h_1) \bullet (k_2, h_2) = (k_1 \cdot k_2, h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2)), \tag{1.1}$$

est isomorphe au groupe G.

On voudrait faire une construction analogue pour le cas des treillis. Malheureusement, des treillis ont des propriétés différentes des groupes ; il n'existe pas, par exemple, de « sous-treillis distingué », on doit parler de congruence.

Définition : Soit L un treillis et soit θ une relation d'équivalence sur L. On dit que θ est une *congruence* si θ est compatible avec les opérations de sup et d'inf, c'est-à-dire, si on a, pour chaque a, b, c, d dans L,

$$(a, b) \in \theta \text{ et } (c, d) \in \theta \text{ entraîne } (a \vee c, b \vee d) \in \theta, \tag{1.2}$$

$$(a, b) \in \theta \text{ et } (c, d) \in \theta \text{ entraîne } (a \wedge c, b \wedge d) \in \theta. \tag{1.3}$$

Le *quotient* $L/_\theta$ est l'ensemble des classes de la congrence $[a]_\theta$, pour a dans L, muni des opérations de treillis $\vee$ et $\wedge$, définies comme $[a]_\theta \vee [b]_\theta = [a \vee b]_\theta$ et $[a]_\theta \wedge [b]_\theta = [a \wedge b]_\theta$.

Chaque congruence d'un groupe G est liée à un sous-groupe distingué K – le sous-groupe K est une des classes de congruence et les autres classes sont des copies de K par des translations. Par contre, les classes d'une congruence d'un treillis L sont toujours des sous-treillis et elles n'ont rien en commun en général. Donc, le premier pas de la généralisation est l'introduction d'une congruence dont les classes sont semblables.

Définition [26] : Soit L un treillis et soit θ une congruence sur L. On dit que la congruence θ sur L est *isoforme* si les classes de θ sont des sous-treillis deux à deux isomorphes.

Définition : Le *diagramme de Hasse* d'un treillis $(L, \leqslant)$ est un graphe dont les sommets sont les éléments du treillis L et les arêtes représentent l'ordre sur L : on a une arête qui monte de a vers b si on a $a < b$ et s'il n'existe aucun élément c avec $a < c < b$.

Exemple 1.1 On voit dans la figure 1.1 deux diagrammes de Hasse de treillis. Sur chacun de ces treillis on a représenté une congruence. La congruence sur le treillis $C(\mathbf{4})$ a quatre classes qui ne sont pas isomorphes puisqu'elles ont des nombres différents d'éléments. Donc cette congruence n'est pas isoforme. Par contre, la congruence sur le treillis $\mathcal{P}(3)$ est isoforme.

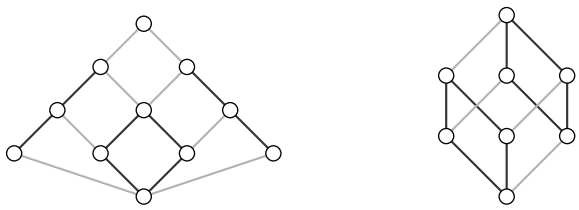


FIG. 1.1 – Treillis $C(\mathbf{4})$ et $\mathcal{P}(3)$, avec une congruence sur chaque treillis : les éléments qui appartiennent à la même classe d'équivalence sont liés par des arêtes noires.

Supposons que L est un treillis avec une congruence isoforme θ. Notons K le quotient $L/_\theta$ et H une classe quelconque de la congruence θ. Pour un élément a de L, on

note $\bar{a}$ la classe d'équivalence de a. On note $\eta_{\bar{a}}$ l'isomorphisme $\bar{a} \to H$. Alors, l'application $a \mapsto (\bar{a}, \eta_{\bar{a}}(a))$ est une bijection entre l'ensemble L et l'ensemble $K \times H$. Grâce à cette bijection, dans toute la suite du texte on identifie l'ensemble L avec l'ensemble $K \times H$.

Notre but est de munir l'ensemble $K \times H$ de deux opérations binaires, disons $\sqcup$ et $\sqcap$, pour que $(K \times H, \sqcup, \sqcap)$ soit isomorphe au treillis $(L, \vee, \wedge)$. Dans le cas des groupes, l'opération $\cdot$ est codée par une application φ. Dans le cas des treillis, on a deux opérations et il nous faut deux applications, φ et ψ, pour coder les opérations.

Supposons qu'il existe 0_H, le plus petit élément de H et 1_H, le plus grand élément de H. On définit les applications φ et ψ de $K \times K$ à H^H par les équations suivantes (on rappelle que l'ensemble $K \times H$ est identifié avec l'ensemble L et alors les opérations $\vee, \wedge$ sont ces du treillis L) :

$$(k, h) \vee (k \vee k', 0_H) = (k \vee k', \varphi(k, k')(h)), \tag{1.4}$$

$$(k, h) \wedge (k \wedge k', 1_H) = (k \wedge k', \psi(k, k')(h)). \tag{1.5}$$

La situation est schématisée dans la figure 1.2. En fait, on écrit $\varphi_{k,k'}(h)$ et $\psi_{k,k'}(h)$ plutôt que $\varphi(k, k')(h)$ et $\psi(k, k')(h)$ en pensant que $\varphi_{k,k'}$ et $\psi_{k,k'}$ sont des applications de H vers H.

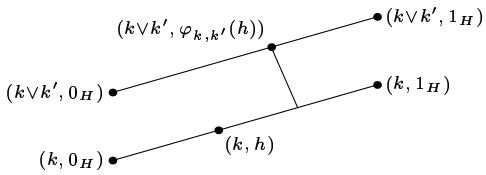


FIG. 1.2 – Cette figure est un extrait du diagramme de Hasse du treillis L. Les lignes presque horisontales représentent des classes de la congruence θ. L'élément $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$ est le plus petit élément de la classe $k \vee k'$ qui est plus grand que l'élément (k, h). On ne sait pas, en général, s'il existe un autre élément entre les éléments (k, h) et $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$ et c'est pourquoi la ligne vers $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$ ne commence pas à (k, h)

On montre ici certaines propriétés des applications φ et ψ dans le cas considéré, c'est-à-dire dans le cas où H possède un plus petit et un plus grand élément. Ensuite, dans la proposition 1.9, on va considérer des conditions plus générales.

Lemme 1.2 *Les applications φ et ψ, définies dans* (1.4) *et* (1.5)*, son bien définies et elles satisfont, pour tous k, k', k'' dans K et h, h' dans H, les conditions suivantes :*

$$\varphi_{k,k} = \psi_{k,k} = \mathrm{id}_H, \tag{1.6}$$

$$\varphi_{k,k' \vee k''} = \varphi_{k \vee k', k''} \circ \varphi_{k,k'}, \tag{1.7}$$

$$\psi_{k,k' \wedge k''} = \psi_{k \wedge k', k''} \circ \psi_{k,k'}, \tag{1.8}$$

$$h \leqslant \psi_{k,k \wedge k'} \circ \varphi_{k \wedge k',k}\,(h), \tag{1.9}$$

$$h \geqslant \varphi_{k,k\vee k'} \circ \psi_{k\vee k',k}\,(h), \tag{1.10}$$
$$\varphi_{k,k'}(h \vee h') = \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h'), \tag{1.11}$$
$$\psi_{k,k'}(h \wedge h') = \psi_{k,k'}(h) \wedge \psi_{k,k'}(h'). \tag{1.12}$$

DÉMONSTRATION : On montre d'abord que l'élément $(k,h)\vee(k\vee k',0_H)$ est de la forme $(k\vee k',h'0)$, pour un certain h' de H. Puisque $k\vee k'$ est plus grand que k dans K, il existe un élément h'' dans H satisfaisant $(k\vee k',0_H)\geqslant(k,h'')$. Chaque classe de congruence forme un sous-treillis donc on a $(k,h'')\geqslant(k,0_H)$ et donc $(k\vee k',0_H)\geqslant(k,0_H)$. Maintenant, puisque (k,h) appartient à la même classe de congruence que $(k,0_H)$, l'élément $(k,h)\vee(k\vee k',0_H)$ appartient à la même classe que $(k\vee k',0_H)$.

Maintenant on commence à montrer les conditions. La condition (1.6) résulte de la définition. On remarque que, si l'hypothèse (1.6) est vraie, la condition (1.7) est vraie si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k\vee k'}, \tag{1.13}$$
$$\varphi_{k,k''} = \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'} \qquad \text{for } k \leqslant k' \leqslant k''. \tag{1.14}$$

L'implication (1.7) $\Rightarrow$ (1.13) et (1.14) est facile à voir. Ensuite on démontre la direction opposée. Considérons k,k',k'' arbitraires dans K. La relation $k\geqslant k\vee k'\geqslant k\vee k'\vee k''$ avec la condition (1.14) donnent $\varphi_{k,k\vee k'\vee k''} = \varphi_{k\vee k',k\vee k'\vee k''}\circ\varphi_{k,k\vee k'}$. Ensuite, (1.7) résulte de (1.13).

Maintenant il suffit de montrer (1.13) et (1.14) pour en déduire (1.7). La condition (1.13) résulte de la définition. Montrons donc (1.14) (voir la figure 1.3). On a déjà vu que, pour $k\leqslant k'\leqslant k''$ dans K, on a $(k,0_H)\leqslant(k',0_H)\leqslant(k'',0_H)$. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned}(k'',\varphi_{k,k''}(h)) = (k,h)\vee(k'',0_H) = (k,h)\vee(k',0_H)\vee(k'',0_H) = \\ = (k',\varphi_{k,k'}(h))\vee(k'',0_H) = (k'',\varphi_{k',k''}\circ\varphi_{k,k'}(h)),\end{aligned}$$

pour chaque h dans H.

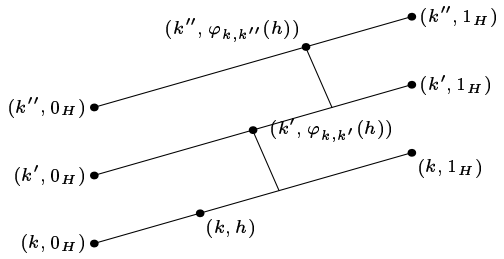


FIG. 1.3 – La condition (1.14) exprime que l'on obtien le même résultat quand on monte de la classe k vers la classe k'' directement et quand on monte de k vers k'' par la classe k'.

Considérons (1.9) (voir la figure 1.4). Sans perte de généralité, on suppose $k' \leqslant k$. On a

$$\begin{aligned}
(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)) &= (k, \varphi_{k',k}(h)) \wedge (k', 1_H) && (1.5)\\
&= ((k', h) \vee (k, 0_H)) \wedge (k', 1_H) && (1.4)\\
&\geqslant ((k', h) \wedge (k', 1_H)) \vee ((k, 0_H) \wedge (k', 1_H)) && (\text{dist.})\\
&\geqslant (k', h) \wedge (k', 1_H) = (k', h)
\end{aligned}$$

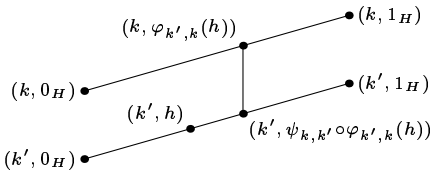


FIG. 1.4 – La condition (1.9) : l'élément $(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h))$ est le plus grand élément de la classe k' qui est plus petit que l'élément $(k, \varphi_{k',k}(h))$. L'élément (k', h) est aussi plus petit que l'élément $(k, \varphi_{k,k'}(h))$ et donc on a $h \leqslant \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)$.

Enfin on montre (1.11) :

$$\begin{aligned}
(k \vee k', \varphi_{k,k'}(h \vee h')) &= (k, h \vee h') \vee (k \vee k', 0_H)\\
&= ((k, h) \vee (k \vee k', 0_H)) \vee ((k, h') \vee (k \vee k', 0_H))\\
&= (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h')\\
&= (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h')).
\end{aligned}$$

Le reste de la démonstration résulte de la dualité entre l'inf et le sup. ■

En plus de la démonstration, il est utile de noter que, sous l'hypothèse (1.6), la condition (1.8) est équivalente aux deux conditions

$$\psi_{k,k'} = \psi_{k,k\wedge k'}, \tag{1.15}$$

$$\psi_{k,k''} = \psi_{k',k''} \circ \psi_{k,k'} \qquad \text{for } k \geqslant k' \geqslant k''. \tag{1.16}$$

Exemple 1.3 La condition (1.11) exprime que l'application φ est compatible avec l'opération du sup. La compatibilité avec l'inf n'est pas remplie en général : on voit un exemple sur la figure 1.5 – on a $\varphi_{0_K,1_K}(a) = \varphi_{0_K,1_K}(b) = 1_H$ tandis que $\varphi_{0_K,1_K}(a \wedge b)$ est 0_H.

Lemme 1.2 décrit certaines propriétés des applications φ et ψ. Ces propriétés sont suffisantes pour la construction de produit semi-direct externe.

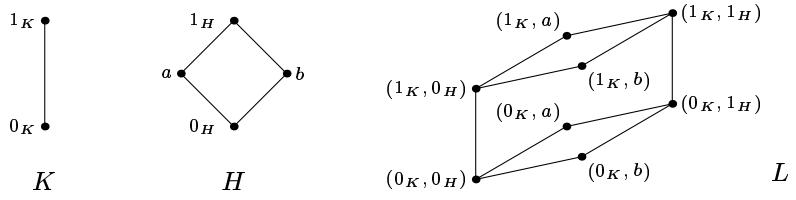


FIG. 1.5 – L'application φ n'est pas nécessairement compatible avec $\wedge$

Proposition 1.4 *Soient K, H deux treillis et soient $\varphi, \psi : K \times K \to H^H$ deux applications satisfaisant les conditions* (1.6)–(1.12). *Alors l'ensemble $K \times H$ avec les deux opérations $\sqcup$, $\sqcap$, définies par*

$$(k_1, h_1) \sqcup (k_2, h_2) = (k_1 \vee k_2,\ \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)), \tag{1.17}$$
$$(k_1, h_1) \sqcap (k_2, h_2) = (k_1 \wedge k_2,\ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)), \tag{1.18}$$

forme un treillis.

DÉMONSTRATION : On remarque d'abord les deux propriétés suivantes, pour tous k, k' dans K et h, h' dans H :

$$h \leqslant h' \Rightarrow \varphi_{k,k'}(h) \leqslant \varphi_{k,k'}(h'), \tag{1.19}$$
$$\varphi_{k,k'}(h \wedge h') \leqslant \varphi_{k,k'}(h) \wedge \varphi_{k,k'}(h'). \tag{1.20}$$

La première propriété résulte de (1.11) et la deuxième de (1.19). On voit aussi de même

$$h \leqslant h' \Rightarrow \psi_{k,k'}(h) \leqslant \psi_{k,k'}(h'), \tag{1.21}$$
$$\psi_{k,k'}(h \vee h') \geqslant \psi_{k,k'}(h) \vee \psi_{k,k'}(h'). \tag{1.22}$$

Un ensemble muni de deux opérations est un treillis si les opérations satisfont les lois d'idempotence, de symétrie, d'associativité et d'absorption. L'idempotence des opérations $\sqcup$ et $\sqcap$ résulte de (1.6), la symétrie résulte des définitions. Maintenant on montre l'associativité :

$$\begin{aligned}
&\big((k_1, h_1) \sqcup (k_2, h_2)\big) \sqcup (k_3, h_3) \\
&= \big(k_1 \vee k_2, \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \sqcup (k_3, h_3) && (1.17)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3}\big(\varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.17)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3} \circ \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3} \circ \varphi_{k_2,k_1}(h_2) \\
&\qquad \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.11)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2, k_1 \vee k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.7)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2 \vee k_3, k_1} \circ \varphi_{k_2, k_3}(h_2) \\
&\qquad \vee \varphi_{k_3 \vee k_2, k_1} \circ \varphi_{k_3, k_2}(h_3)\big) && (1.7)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2 \vee k_3, k_1}\big(\varphi_{k_2, k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3, k_2}(h_3)\big)\big) && (1.11)
\end{aligned}$$

$$= (k_1, h_1) \sqcup \big(k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_2,k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3,k_2}(h_3)\big) \tag{1.17}$$
$$= (k_1, h_1) \sqcup \big((k_2, h_2) \sqcup (k_3, h_3)\big). \tag{1.17}$$

Pour la loi d'absorption on doit montrer d'abord

$$\varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1}(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)) \leqslant h_1. \tag{$*$}$$

On l'obtient par

$$\begin{aligned}
&\varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \\
&\leqslant \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1} \circ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1} \circ \psi_{k_2,k_1}(h_2) && (1.20)\\
&\leqslant \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1} \circ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \\
&= \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1} \circ \psi_{k_1, k_1 \wedge k_2}(h_1) && (1.15)\\
&\leqslant h_1. && (1.10)
\end{aligned}$$

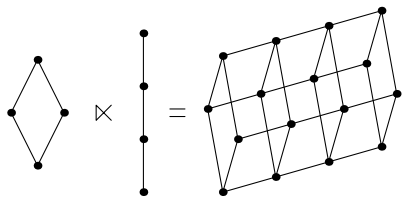
L'absorption se montre maintenant :

$$\begin{aligned}
&(k_1, h_1) \sqcup \big((k_1, h_1) \sqcap (k_2, h_2)\big) \\
&= (k_1, h_1) \sqcup \big(k_1 \wedge k_2,\ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big) && (1.18)\\
&= \big(k_1,\ \varphi_{k_1, k_1 \wedge k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.17)\\
&= \big(k_1,\ \varphi_{k_1,k_1}(h_1) \vee \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.13)\\
&= \big(k_1,\ h_1 \vee \varphi_{k_1 \wedge k_2, k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.6)\\
&= (k_1, h_1) && (*)
\end{aligned}$$

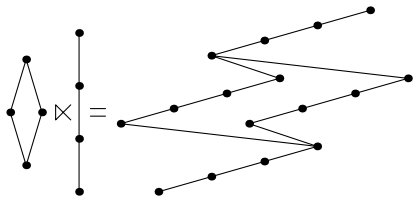
Les démonstrations de l'associativité et de l'absorption pour l'inf sont semblables. ■

Définition : Le treillis construit dans la proposition 1.4 est appelé un *produit semi-direct* des treillis K et H, et noté $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$.

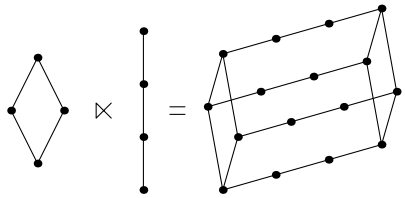
Exemple 1.5 Soient K, H des treillis quelconques et soit $\varphi_{k,k'} = \psi_{k,k'} = \mathrm{id}_H$, pour tous k, k' dans K. Alors on voit immédiatement des définitions (1.17) et (1.18) que le produit semi-direct $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ est le produit direct $K \times H$.



Exemple 1.6 Soient K, H des treillis quelconques et, pour chaque $k \leqslant k'$ et h dans H, soient $\varphi_{k,k'}(h) = 0_H$, $\psi_{k',k}(h) = 1_H$. Alors on a $(k, h) \leqslant (k', h')$ si et seulement si on a $k < k'$ dans K ou $k = k'$ et $h \leqslant h'$ dans H. Par conséquent, le produit semi-direct de K et H consiste en $|K|$ copies du treillis H arrangées dans la forme du treillis K.



Exemple 1.7 Soient K, H des treillis arbitraires et, pour chaque $k \leqslant k'$, soient $\varphi_{k,k'}(h) = 1_H$, pour $h > 0_H$, et $\psi_{k',k}(h) = 0_H$, pour $h < 1_H$. Dans ce cas là, si K possède au moins 2 éléments et H possède au moins 3 éléments, le treillis $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ est non modulaire.



Comme on peut attendre, les treillis K et H peuvent être retrouvés dans son produit semi-direct.

Proposition 1.8 *Supposons L égal à $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Alors il existe une congruence θ sur L dont K est le quotient et telle que chaque classe d'équivalence de θ est isomorphe à H.*

DÉMONSTRATION : Soit θ l'équivalence définie par $((k,h),(k',h')) \in \theta \Leftrightarrow k = k'$. C'est une congruence à cause des définitions (1.17) et (1.18). Le fait que le quotient de $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ par θ est isomorphe à K, est trivial. Il existe une bijection entre les classes de θ et l'ensemble H. En plus, d'après Condition (1.6), les opérations de treillis sur H et sur chaque classe de congruence sont égales. ■

On va maintenant étudier le produit semi-direct du point de vue interne. Un certain travail à été déjà fait dans le lemme 1.2 sous l'hypothèse que chaque classe de congruence possède un élément minimal et un élément maximal. Bien que ces conditions ne soient pas très restrictives, on peut les affaiblir. Rappelons de nouveau, qu'un treillis L avec une congruence isoforme θ est identifié avec le produit cartésien de $L/_\theta$ et d'une classe d'équivalence.

Proposition 1.9 *Soit L un treillis possédant une congruence isoforme θ. Soit K le quotient $L/_\theta$ et soit H une des classes de congruence. Supposons que les deux conditions suivantes sont remplies :*

$$\begin{gathered}\textit{l'ensemble } \{h' \in H;\ \exists\, k,k' \in K:\ (k,h) \leqslant (k',h')\},\ \textit{noté } E_h,\\ \textit{est minoré pour chaque } h \textit{ dans } H,\end{gathered} \tag{1.23}$$

$$\begin{gathered}\textit{l'ensemble } \{h' \in H;\ \exists\, k,k' \in K:\ (k,h) \geqslant (k',h')\},\ \textit{noté } E^h,\\ \textit{est majoré pour chaque } h \textit{ dans } H.\end{gathered} \tag{1.24}$$

Alors il existe des applications φ et ψ satisfaisantes aux conditions de la proposition 1.4 et telles que L est isomorphe au treillis $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$.

DÉMONSTRATION : D'abord on fixe, pour chaque h dans H, un minorant $\underline{h}$ de l'ensemble E_h et on fixe un majorant $\overline{h}$ de l'ensemble E^h. La démonstration est semblable à celle du lemme 1.2. On définit les applications φ et ψ de la façon similaire aux définitions (1.4) et (1.5).

$$(k,h) \vee (k \vee k', \underline{h}) = (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h)), \tag{1.25}$$

$$(k,h) \wedge (k \wedge k', \overline{h}) = (k \wedge k', \psi_{k,k'}(h)). \tag{1.26}$$

Cependant on doit s'assurer que les définitions ne dépendent pas du choix des bornes. Ce qui est le cas, car on a $\varphi_{k,k'}(h) = \min\{h';\ (k \vee k', h') \geqslant (k,h)\}$ et $\psi_{k,k'}(h) = \max\{h';\ (k \wedge k', h') \leqslant (k,h)\}$, quel que soit le choix de $\underline{h}$ et $\overline{h}$.

Maintenant on montre les conditions de la proposition 1.4. On montre seulement une moitié des conditions, les autres sont duales. On a vu que les définitions (1.4) et (1.5) ne dépendent pas du choix des bornes et donc on peut utiliser n'importe quelles bornes, pas forcement $\underline{h}$ et $\overline{h}$. Par exemple, $\varphi_{k,k}(h) = h$ donne $\underline{h} \leqslant h$ et donc $\underline{h}$, $\underline{\underline{h}}$, $\underline{\underline{\underline{h}}}$, ... sont tous des minorants de l'ensemble E_h.

La condition (1.6) est remplie trivialement.

On remarque que $\underline{h}$ et $\underline{h'}$ sont tous les deux des minorants de l'ensemble $E_{h \vee h'}$ et donc $\underline{h} \vee \underline{h'}$ est une borne inférieure de $E_{h \vee h'}$. Maintenant, la condition (1.11) se montre :

$$\begin{aligned}(k', \varphi_{k,k'}(h \vee h')) &= (k, h \vee h) \vee (k', \underline{h} \vee \underline{h'}) = \\ &= (k,h) \vee (k,h') \vee (k', \underline{h}) \vee (k', \underline{h'}) = (k, \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k', \varphi_{k,k'}(h')).\end{aligned}$$

Pour la condition (1.9), on suppose, sans perte de généralité, $k \geqslant k'$. On a

$$\begin{aligned}&(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)) = (k, \varphi_{k',k}(h)) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h) && (1.26)\\ &= ((k',h) \vee (k, \underline{h})) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h) && (1.25)\\ &\geqslant ((k',h) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) \vee ((k, \underline{h}) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) && \text{(dist.)}\\ &\geqslant ((k',h) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) = (k',h)\end{aligned}$$

On a vu dans la démonstration du lemme 1.2 qu'il suffit de montrer (1.13) et (1.14) au lieu de (1.7). La condition (1.13) est vraie, considérons maintenant (1.14). D'après la démonstration de la proposition 1.4, on a (1.19). Alors $\underline{h} \leqslant \varphi_{k,k'}(h)$ implique $\varphi_{k',k''}(h) \leqslant \varphi_{k',k''}(\varphi_{k,k'}(h))$. Donc on a la relation $(k', \underline{h}) \leqslant (k'', \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h))$. Le résultat $\underline{h} \leqslant \varphi_{k,k'}(h)$ donne aussi que $\underline{\underline{h}}$ est un minorant de $E_{\varphi_{k,k'}(h)}$. Maintenant on a

$$\begin{aligned}(k'', \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h)) &= (k', \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k'', \underline{\underline{h}})\\ &= (k,h) \vee (k', \underline{h}) \vee (k'', \underline{\underline{h}})\\ &= (k'', \varphi_{k,k''}(h)) \vee (k', \underline{h}) = (k'', \varphi_{k,k''}(h)).\end{aligned}$$

On sait maintenant que les applications φ et ψ satisfont toutes les conditions requises. Il reste encore à montrer que les opérations $\sqcup$, $\sqcap$ du produit coïncident avec les opérations $\vee$, $\wedge$ du treillis L. On a

$$\begin{aligned}(k_1,h_1) \sqcup (k_2,h_2) &= (k_1 \vee k_2, \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)) && (1.17)\\ &= (k_1 \vee k_2, \underline{h}_1) \vee (k_1,h_1) \vee (k_1 \vee k_2, \underline{h}_2) \vee (k_2,h_2) && (1.25)\\ &= (k_1,h_1) \vee (k_2,h_2). && (1.23)\end{aligned}$$

Le cas de l'inf se montre semblablement. ■

Puisque l'on a montré que les opérations $\sqcup$, et $\sqcap$ coïncident avec les opérations $\vee$, et $\wedge$, on n'utilise plus les symboles $\sqcup$, $\sqcap$ mais on utilise des symboles standards $\vee$ et $\wedge$.

Exemple 1.10 Les conditions (1.23) et (1.24) ne peuvent pas être évitées. Prenons, par exemple, $L = \{0,1\} \times \mathbb{Z}$ avec l'ordre lexicographique. C'est un ensemble totalement ordonné et donc un treillis qui possède une congruence isoforme évidente : le quotient est $\{0,1\}$ et toutes les deux classes de congruence sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Pourtant on ne peut pas trouver des applications φ et ψ satisfaisantes les conditions de la proposition 1.4 parce que $(1,a)$ est strictement plus grand de $(0,b)$ dans L, quels que soient a, b dans $\mathbb{Z}$.

1.2 Applications φ et ψ

La construction du produit semi-direct met en jeu deux applications φ et ψ pour munir l'ensemble $K \times H$ d'une structure de treillis. Néanmoins, comme les opérations de treillis découlent de l'ordre sur le treillis et cet ordre est, d'après la condition (1.17), défini par

$$(k,h) \leqslant (k',h') \Longleftrightarrow (k \leqslant k') \text{ et } (\varphi_{k,k'}(h) \leqslant h'). \tag{1.27}$$

une de ces deux applications doit être suffisante pour décrire la structure de treillis. Dans cette section on étudie le rapport entre les applications φ et ψ, en particulier, pour pouvoir définir le produit semi-direct avec une seule des ces applications.

Définition : Soit L un treillis. Une partie I de L est appelée un *idéal* si elle satisfait aux deux conditions :

$$a, b \in I \text{ entraîne } a \vee b \in I, \tag{1.28}$$

$$a \in L \text{ et } b \in I \text{ entraîne } a \wedge b \in I. \tag{1.29}$$

Pour chaque b dans L, l'ensemble $\{a \in L;\ a \leqslant b\}$ est un idéal qui est appelé un *idéal principal* et noté $(b\,]$. On définit dualement un *idéal dual* et un *idéal dual principal*, noté $[\,b)$.

Le lemme technique suivant décrit des relations entre $\varphi_{k,k'}$ et $\psi_{k',k}$ dans le cas générique, à savoir quand k est plus petit que k'. Les autres cas résultent de ce cas.

Lemme 1.11 *Supposons qu'un treillis L est un produit semi-direct $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Choisissons des éléments k et k' dans K, vérifiants $k \leqslant k'$.*
(i) Définissons des applications $\xi = \psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'}$ et $\omega = \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k}$. Alors on a :

$$\xi(h) = \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k,k'}(j) = \varphi_{k,k'}(h)\,\},$$
$$\omega(h) = \min\{\, j \in H;\ \psi_{k',k}(j) = \psi_{k',k}(h)\,\}.$$

(ii) On a $\varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k'}$ et $\psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k} = \psi_{k',k}$.
(iii) L'application $\varphi_{k,k'}|_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}}$ est un isomorphisme entre les treillis $\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}$ et $\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}$. L'application $\psi_{k',k}|_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}}$ est l'isomorphisme inverse.
(iv) L'application $\psi_{k',k}$ vérifie $\psi_{k',k}(h) = \max(\varphi_{k,k'}^{-1}((h\,]))$.

DÉMONSTRATION : (i) Par l'inégalité (1.9), on obtient $h \leqslant \xi(h)$. Après, on utilise (1.19) pour obtenir $\varphi_{k,k'}(h) \leqslant \varphi_{k,k'}(\xi(h))$. De (1.10), on a $\varphi_{k,k'}(h) \geqslant \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k}(\varphi_{k,k'}(h)) = \varphi_{k,k'}(\xi(h))$. Et donc, pour chaque h dans H, on a $\varphi_{k,k'}(\xi(h)) = \varphi_{k,k'}(h)$ et $h \leqslant \xi(h)$. Les propriétés de l'application ω se montrent de la façon analogue. Le résultat (ii) est maintenant une conséquence immédiate.

(iii) Soit h dans $\operatorname{Im} \psi_{k',k}$. Il existe h' dans H qui satisfait $\psi_{k',k}(h') = h$. Mais on a $\xi(h) = \xi\psi_{k',k}(h') = \psi_{k',k}(h') = h$. Et cela donne $\xi|_{\operatorname{Im} \psi_{k',k}} = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} \psi_{k',k}}$. On a de même $\omega|_{\operatorname{Im} \varphi_{k,k'}} = \mathrm{id}_{\operatorname{Im} \varphi_{k,k'}}$ et donc les applications $\varphi_{k,k'}|_{\operatorname{Im} \psi_{k',k}}$ et $\psi_{k',k}|_{\operatorname{Im} \varphi_{k,k'}}$ sont des bijections inverses. La propriété (1.19) donne que $\varphi_{k,k'}(H)$ est un sup-demi-treillis et donc, d'après (1.21), l'ensemble $\xi(H)$, qui est égal à $\operatorname{Im}_{\psi_{k',k}}$, est un treillis et les applications $\varphi_{k,k'}|_{\operatorname{Im} \psi_{k',k}}$ et $\psi_{k',k}|_{\operatorname{Im} \varphi_{k,k'}}$ sont des isomorphismes.

(iv) Considérons un élément h dans H et notons M_h l'ensemble $\{\, j \in \operatorname{Im} \varphi_{k,k'};\ j \leqslant h \,\}$. Cet ensemble n'est pas vide parce que, d'après (1.9), l'élément $\omega(h)$ est dans M_h. On veut montrer que $\omega(h)$ est le plus grand élément de M_h.

On montre d'abord que $\omega(h)$ est un élément maximal de M_h. En effet, si on a j dans M_n, avec $\omega(h) < j \leqslant h$, alors il existe un j' dans H qui vérifie $\varphi_{k,k'}(j') = j$. D'après (1.21), on a $\psi_{k',k}\omega(h) = \psi_{k',k}(h) \leqslant \psi_{k',k}(j) \leqslant \psi_{k',k}(h)$ et donc on a $\psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(j)$. On applique $\varphi_{k,k'}$ pour obtenir $\omega(h) = \omega(j) = \omega\varphi_{k,k'}(j') = \varphi_{k,k'}(j') = j$, ce qui est une contradiction.

Supposons maintenant que l'ensemble M_h a deux éléments maximaux, disons j_1, j_2. Alors il existe des éléments h_1, h_2 dans H qui vérifient $\varphi_{k,k'}(h_i) = j_i$, pour $i = 1, 2$. Mais on a $j_1 \vee j_2 = \varphi_{k,k'}(h_1) \vee \varphi_{k,k'}(h_2) = \varphi_{k,k'}(h_1 \vee h_2)$ et aussi $j_1 \vee j_2 \leqslant h$ et donc $j_1 \vee j_2$ appartient à M_h et j_1 est égal à j_2.

Pour l'instant on a $\omega(h) = \max(M_h)$. On applique $\psi_{k',k}$ à cette égalité pour obtenir $\psi_{k',k}\omega(h) = \psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(\max(M_h))$. Ensuite on trouve

$$\begin{aligned}
\psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(\max(M_h)) &= \psi_{k',k}(\max\{\, j \in \operatorname{Im} \varphi_{k,k'};\ j \leqslant h \,\}) \\
&= \max\{\, j \in \operatorname{Im} \xi;\ j \leqslant \psi_{k',k}(h) \,\} && (iii) \\
&= \max\{\, j \in \operatorname{Im} \xi;\ \varphi_{k,k'}(j) \leqslant h \,\} && (iii) \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k,k'}(j) \leqslant h \,\}. && (i) \\
&= \max\,(\varphi_{k,k'}^{-1}((h\,])).
\end{aligned}$$

Ce qui est (iv). ■

Maintenant on est prêt à définir le produit semi-direct des treillis en utilisant une seule application.

Proposition 1.12 *Soient K, H deux treillis et soit φ une application de $K \times K$ vers H^H qui satisfait $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pour tous k dans K, et les conditions* (1.7) *et* (1.11), *et aussi, pour tous k_1, k_2 dans K, la condition*

$$\textit{l'ensemble } \varphi_{k_1,k_2}^{-1}\Big((h\,]\Big) \textit{ possède un plus petit élément.} \tag{1.30}$$

Alors l'ensemble $K \times H$ muni de l'ordre $\leqslant$, défini par (1.27), *est un treillis.*

DÉMONSTRATION : On reconstruit l'application ψ, à partir de l'application φ, et on montre que les applications vérifient les conditions d'un produit semi-direct. L'application ψ : $K \times K \to H^H$ est définie de la façon suivante :

$$\psi_{k_1,k_2}(h) = \max(\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_1}((h])). \tag{1.31}$$

D'abord, la relation $\psi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pour chaque k dans K, est immédiate, de même que la condition (1.15). Alors, pour montrer (1.8), il suffit de montrer (1.16). On trouve

$$\begin{aligned}
&\psi_{k',k''} \circ \psi_{k,k'}(h) = \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant \max\{\, g \in H;\ \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\}\} && (1.31)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \exists g \in H:\ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant g \text{ et } \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\} \\
&= \max\{\, j \in H;\ \exists g \in H:\ \varphi_{k',k} \circ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\} && (1.19)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k',k} \circ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant h \,\} \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k'',k}(j) \leqslant h \,\} && (1.7)\\
&= \psi_{k,k''}(h). && (1.31)
\end{aligned}$$

Pour (1.10), d'après la définition de $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((h\,])$, on a $\varphi_{k_1,k_2}(g) \leqslant h$, pour chaque g dans $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((h\,])$. La même chose est vraie pour le maximum, ce qui implique l'inégalité $\varphi_{k_1,k_2}(\psi_{k_2,k_1}(h)) \leqslant h$.

La condition (1.9) est similaire : chaque h de H appartient à $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((\varphi_{k_1,k_2}(h)\,])$. Donc $\psi_{k_2,k_1}(\varphi_{k_1,k_2}(h))$, qui est égal à $\max(\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((\varphi_{k_1,k_2}(h)\,])))$, est plus petit que h.

Considérons maintenant (1.12). On remarque que l'ensemble $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ est un idéal principal : si des éléments j_1, j_2 sont dans $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$, on a l'inégalité $\varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_i) \leqslant h$, pour $i = 1, 2$ et donc on a aussi $\varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_1 \vee j_2) = \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_1) \vee \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_2) \leqslant h$. La condition (1.19) assure que, pour j dans $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ quelconque, tous les éléments plus petits que j appartiennent aussi à l'ensemble $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$. Ces deux propriétés ensemble impliquent que $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ est un idéal de H. Et (1.30) affirme que cet idéal est principal. Ensuite on trouve

$$\begin{aligned}
&\psi_{k_2,k_1}(h_1 \wedge h_2) \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \wedge h_2 \,\} && (1.31)\\
&= \max\big(\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \,\} \cap \{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_2 \,\}\big) \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \,\} \wedge \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_2 \,\} \\
&= \psi_{k_2,k_1}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2), && (1.31)
\end{aligned}$$

ce qui donne (1.12).

Les conditions (1.7) et (1.11) sont vraies par hypothèse et donc les treillis K et H avec les applications φ et ψ sont convenables à former un produit semi-direct, d'après la proposition 1.4. Puisque la définition (1.27) est compatible avec la définition (1.17), la démonstration est complète. ■

Le treillis construit dans la proposition 1.12 est un produit semi-direct, et il est noté $K \ltimes^{\varphi} H$. De la même façon, si l'application considérée est ψ, c'est-à-dire, celle qui décrit l'opération d'inf, on dénote le produit semi-direct obtenu par $K \ltimes_{\psi} H$.

1.3 Produit semi-direct de demi-treillis

On vient de définir le produit semi-direct des treillis en utilisant une seule application. On utilise la même idée pour définir le produit semi-direct de demi-treillis et on étudie certaines propriétés de ce produit.

Définition : Un sup-demi-treillis L est dit *complet* s'il possède un plus petit élément et chaque partie de L possède une borne supérieure. Un treillis L est dit *complet* s'il possède un plus petit et un plus grand éléments et si chaque partie de L possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Il est bien connu [1] que ces deux définitions sont équivalentes, c'est-à-dire qu'un sup-demi-treillis complet est un treillis complet. On définit maintenant le produit semi-direct de deux demi-treillis et on montre qu'un produit semi-direct de treillis complets est complet.

Proposition 1.13 *(i) Soient K, H deux sup-demi-treillis et soit φ une application de $K \times K$ à $\mathrm{End}(H)$ qui satisfait $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pour tous k dans K, et la condition* (1.11)*. Alors l'ensemble $K \times H$ muni de l'ordre $\leqslant$ défini par* (1.27) *est un sup-demi-treillis.*
(ii) En plus, si K, H sont complets et l'application φ satisfait la condition (1.30) *alors $(K \times H, \leqslant)$ est un treillis complet.*

DÉMONSTRATION : La démonstration de (i) est semblable à celle de la proposition 1.4. La seule chose à préciser est que la condition (1.7) est satisfaite parce que l'image de φ est $\mathrm{End}(H)$.

(ii) Supposons que K et H sont des sup-demi-treillis complets. Notons 0_K et 0_H les plus petits éléments de ces treillis et 1_K et 1_H les plus grands éléments. On montre d'abord que le produit semi-direct $(K \times H, \leqslant)$ possède un plus petit élément. Pour chaque k_1, k_2 in K, on a $\varphi_{k_1,k_2}(0_H) \leqslant 0_H$, puisque l'ensemble $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}(0_H)$ est non-vide. Alors on a $\varphi_{k_1,k_2}(0_H) = 0_H$. Cela implique que, quels que soient $k_1 \leqslant k_2$ dans K et h dans H, on a $(k_1, 0_H) \leqslant (k_2, h)$. Alors, $(0_K, 0_H)$ est le plus petit élément de $(K \times H, \leqslant)$.

Soit maintenant M, un sous-ensemble non-vide de $K \times H$. On veut montrer que M possède une borne supérieure. Notons A l'ensemble $\{\, k \in K;\ \exists h \in H :\ (k,h) \in M \,\}$ et a le sup de A. Notons aussi B l'ensemble $\{\, j \in H;\ \forall (k,h) \in M :\ (a,j) \geqslant (k,h) \,\}$. Cet ensemble n'est pas vide puisque l'élément $(a, 1_H)$ est supérieur ou égal à chaque élément de M. On note b l'inf de B. Montrons d'abord que b appartient à B. Si ce n'était pas vrai, alors il existerait un élément (k,h) dans M satisfaisant $(k,h) \nleqslant (a,b)$. Soit c l'élément $\varphi_{k,a}(h)$ de H. L'élément c est un minorant de B parce que chaque (a,j), pour j dans B, est plus grand que l'élément (k,h). Mais b est le plus grande minorant de B et donc on a $c \leqslant b$ qui implique $(k,h) \leqslant (a,b)$ et cela fait une contradiction.

Par conséquant, l'élément (a, b) est un majorant de M. On veut montrer que c'est le sup, c'est-à-dire, si un élément (k, h) est un autre majorant de M alors on a $(a, b) \leqslant (k, h)$. Puisque (k, h) est un majorant de M, l'élément k doit majorer A. Mais a est un sup de A et donc on a $k \geqslant a$. Si k et a sont égaux, on a $h \in B$ et $b \leqslant h$. Supposons donc $k > a$. D'après la condition (1.30), on sait que l'ensemble $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$ possède un plus grand élément, disons m. Puisque b n'appartient pas à $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$, on a $m \ngeqslant b$. Mais l'élément (a, m) doit majorer M : considérons n'importe quel élément (l, j) dans M. Alors l'élément (k, h) majore M et on a $\varphi_{l,k}(j) \leqslant h$. D'après la condition (1.7) on a $\varphi_{l,k}(j) = \varphi_{a,k} \circ \varphi_{l,a}(j)$ et donc $\varphi_{l,a}(j)$ appartient à $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$, ce qui implique $(a, m) \geqslant (l, j)$. Alors (a, m) est un majorant de M et on obtient $m \in B$. Ce qui contredit avec $m \ngeqslant b$. Par conséquent, l'élément (a, b) est le sup de M et le sup-demi-treillis $(K \times H, \leqslant)$ est complet. ■

Le produit semi-direct des demi-treillis est noté de la même façon que le produit semi-direct des treillis, c'est-à-dire, $K \times^{\varphi} H$ pour des sup-demi-treillis et $K \times_{\psi} H$ pour des inf-demi-treillis. Le produit semi-direct des demi-treillis peut aussi être characterisé de façon interne :

Proposition 1.14 *Soit L un sup-demi-treillis et soit θ une congruence isoforme sur L. Notons K le demi-treillis $L/_{\theta}$, et H une des classes de congruence. Si L vérifie la condition (1.23), alors il existe une application φ de $K \times K$ vers* $\mathrm{End}(H)$ *telle que L est isomorphe au demi-treillis $K \ltimes^{\varphi} H$.*

DÉMONSTRATION : Il faut seulement montrer les conditions de la proposition 1.13. La démonstration est analogue à celle de la proposition 1.9. ■

Définition : Soit $(A, \leqslant)$ un ensemble ordonné. Soient a, b deux éléments de A. On dit que l'élément b est un *successeur immédiat* de l'élément a, si b est plus grand que a et il n'existe pas d'élément c, distincte de a et b, qui est entre a et b. En même temps, l'élément a est un *prédecesseur immédiat* de b.

On souhaite maintenant décrire l'application φ. On peut le bien décrir complètement, c'est-à-dire, définir $\varphi_{k,k'}$ pour chaque pair k, k' dans K. Mais ce n'est pas nécessaire. Notons que l'on a $\varphi_{k,k'} = \mathrm{id}_H$, pour $k \geqslant k'$. Si les éléments k et k' son incomparables, utilisant la condition (1.13), on obtient $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k \vee k'}$. Par conséquant, il suffit de décrire les applications $\varphi_{k,k'}$ seulement pour $k < k'$. Avec une condition additionnele on peut encore reduire des cas et considérer seulement que k' est un successeur immédiat de k.

Proposition 1.15 *Soient K, H deux sup-demi-treillis et soit φ une application de $K \times K$ vers* $\mathrm{End}(H)$ *telle que $K \ltimes^{\varphi} H$ existe.*
(i) Si chaque intervalle de K est d'une longueur finie, alors l'application φ est uniquement décrite par les applications $\varphi_{k,k'}$, avec k', un successeur immédiat de k dans K.
(ii) Si chaque intervalle de H est de longueur finie, alors on a, pour chaque k' un successeur immédiat de k dans K,

$$\varphi_{k,k'}(h) = \varphi_{k,k'}\big(\min\{h' \in H : \ (h' \geqslant h) \text{ et } ((k', \varphi_{k,k'}(h')) \text{ succède imméd. } (k, h')))\}\big).$$

DÉMONSTRATION : (i) On a dit tout à l'heure qu'il suffit de décrire les applications $\varphi_{k,k'}$ seulement pour $k < k'$, les autres sont détereminé par ailleur. Considérons une paire k, k' avec $k < k'$ dans K, où k' n'est pas un successeur immédiat de k. Chaque intervalle dans K est fini donc il existe une suite $k = k_0, k_1, ..., k_m = k'$ telle que k_i est un successeur immédiat de k_{i-1}, pour chaque i entre 1 et m. D'après (1.14), on a $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k_{m-1},k_m} \circ \cdots \circ \varphi_{k_1,k_2} \circ \varphi_{k_0,k_1}$.

(ii) Si l'élément $(k', \varphi_{k,k'}(h))$ est un successeur immédiat de l'élément (k, h), le résultat est vrai. Si ce n'est pas le cas, alors il existe un élément (k'', h'') entre (k, h) et $(k', \varphi(k, k')(h))$. Puisque k' est un successeur immédiat de k, on a nécessairement $k'' = k$ et on peut continuer par induction. ■

La proposition 1.15 exprime que, dans le cas d'un treillis L dont tous les intervalles sont fini (par exemple pour L est fini), l'application φ est uniquement déterminée par les couples $((k, h), (k', \varphi_{k,k'}(h)))$ où l'élément $(k', \varphi_{k,k'}(h))$ est un succesuer immédiat de l'élément (k, h). On reprend cette idée dans le chapitre 2.

On s'est occupé, dans toute la section, des sup-demi-treillis. Mais évidemment, il existe des résultats duaux pour de inf-demi-treillis, dont les démonstrations sont duales.

1.4 Congruence arbitraire

Dans cette section on montre que si un treillis L est equipé d'une congruence arbitraire θ, alors L se plonge dans un produit semi-direct de $L/_\theta$ et d'une somme de classes d'équivalence de θ.

Définition : Soient $L_1, L_2, \ldots, L_\kappa$ des treillis, pour un ordinal κ. On note $\sum_{i<\kappa} L_i$ la *somme ordinale* des treillis, définie comme la somme disjointe des ensembles L_i munie de l'ordre $\leqslant$:

$$a \leqslant b \text{ in } L \Longleftrightarrow ((a, b \in L_i) \text{ et } (a \leqslant_{L_i} b)) \text{ ou } ((a \in L_i, b \in L_j) \text{ et } (i < j)).$$

Il est évident qu'une somme ordinale soit un treillis.

Proposition 1.16 *Soit L un treillis et soit θ une congruence non-triviale sur L. Alors L se plonge dans un produit semi-direct de $L/_\theta$ et d'une somme ordinale de classes de congruence et des treillis d'un élément. Ce plongement étend la congruence θ en congruence canonique du produit semi-direct.*

DÉMONSTRATION : Notons $K = L/_\theta$, et soit $[a]_\theta$ la classe de a vis-a-vis à θ. On plonge d'abord le treillis L dans un treillis L', où toutes les classes de congruence possèdent des éléments extrémaux. Pour cela on pose $L' = L \cup \{0_k, 1_k;\ k \in K\}$. L'ordre sur L' est défini par :

$$\begin{array}{ll} a \leqslant_{L'} b \Leftrightarrow a \leqslant_L b & \text{pour } a, b \in L \\ 0_k \leqslant_{L'} a \Leftrightarrow k \leqslant_K [a]_\theta & \text{pour } a \in L, k \in K \\ a \leqslant_{L'} 1_k \Leftrightarrow [a]_\theta \leqslant_K k & \text{pour } a \in L, k \in K \end{array}$$

$$\begin{aligned}
0_k \leqslant_{L'} 0_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' && \text{pour } k, k' \in K \\
1_k \leqslant_{L'} 1_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' && \text{pour } k, k' \in K \\
0_k \leqslant_{L'} 1_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' && \text{pour } k, k' \in K \\
1_k <_{L'} 0_{k'} &\Leftrightarrow k <_K k' && \text{pour } k, k' \in K
\end{aligned}$$

C'est facile à voir que $(L', \leqslant_{L'})$ forme un treillis. On définit une équivalence θ' sur le treillis L' de sorte que les classes d'équivalence soient, pour chaque k dans K, les ensembles $\{a \in L;\ [a]_\theta = k\} \cup \{0_k, 1_k\}$. Cette équivalence est une congruence est son quotient est le treillis K. On plonge le treillis L dans L' par l'application $a \mapsto a$. Ce plongement étend la congruence θ en congruence θ'.

On note α l'homomorphisme canonique de L' sur K, Choisissons maintenant un ordre $\trianglelefteq$ qui soit une extension linaire de l'ordre $\leqslant_K$. On note $\lhd$ la version stricte de $\trianglelefteq$. On construit, en utilisant cet ordre, un treillis H comme une somme ordinale des classes de θ' :

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in K,\ \text{ordonné par } \trianglelefteq} \alpha^{-1}(k).$$

On note γ l'application de H vers K qui envoie chaque terme de la somme ordinale vers son élément associé dans K.

Chaque terme de H est une copie de $\alpha^{-1}(k)$ pour un certain k dans K. Alors il existe une bijection naturelle β_k entre les ensembles $\alpha^{-1}(k)$ et $\gamma^{-1}(k)$. Cette application est un homomorphisme. Si on réunit toutes les β_k, on obtient β, une bijection de l'ensemble L' à l'ensemble H : définissons $\beta(a) = \beta_{\alpha(a)}(a)$.

On définit maintenant l'application φ de $K \times K$ à H^H qui permet construire un produit semi-direct. Pour cela, on définit $\varphi_{k,k'}$, pour tous $k <_K k'$ dans K comme suit (voir l'exemple 1.17) :

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}(h) &= \beta(0_{\gamma(h)}) && \text{pour } h \leqslant_H \beta(0_k) \text{ ou } \beta(1_{k'}) <_H h \\
\varphi_{k,k}(h) &= \beta(1_{k'}) && \text{pour } \beta(1_k) \leqslant_H h \leqslant_H \beta(1_{k'}) \\
\varphi_{k,k'}(h) &= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) && \text{pour } \beta(0_k) <_H h <_H \beta(1_k)
\end{aligned} \tag{1.32}$$

On doit d'abord montrer que cette application permet construire un produit semi-direct. On commence par la démonstration que, pour tous $k <_K k'$ dans K, l'application $\varphi_{k,k'}$ est compatible avec le sup. Pour cela, on va montrer que $\varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k,k'}(h')$ est égal à $\varphi_{k,k'}(h \vee_H h')$, pour tous h, h' dans H. Considérons $\gamma(h) \trianglelefteq \gamma(h')$, sans perte de généralité. Puisqu'on a $\gamma(\varphi_{k,k'}(h)) \trianglelefteq \gamma(\varphi_{k,k'}(h'))$, le résultat est vrai pour $\gamma(h) \lhd \gamma(h')$. Supposons ensuite $\gamma(h) = \gamma(h')$. Le cas $\gamma(h) \neq k$ est clair alors considérons $\gamma(h) = \gamma(h') = k$. Si un des éléments h, h' est égal à 0_k ou à 1_k alors le résultat est clair. Supposons que ce n'est pas le cas. On a

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k,k'}(h') &= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \beta_{k \vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta_{k \vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h')}(h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \beta_{\gamma(h) \vee_K 0_{k'}}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}_{\gamma(h')}(h') \vee_{L'} 0_{k'})
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta_{k\vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h \vee_H h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \beta(\beta^{-1}(h \vee_H h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \varphi_{k,k'}(h \vee_H h'). \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

On a utilisé les faites que l'application β est un isomorphisme, quand on l'a resteinte à une classe de congruence, et que l'on a des égalités $\gamma(h) = \gamma(h')$ et $\alpha(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) = k \vee_K k' = \alpha(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_{k'})$.

Maintenant on montre $\varphi_{k,k''} = \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}$ pour tous $k <_K k' <_K k''$ dans K. On trouve

$$\begin{aligned}
\varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h) &= \beta(\beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'})) \vee_{L'} 0_{k''}) \qquad (1.32) \\
&= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'} \vee_{L'} 0_{k''}) \\
&= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k''}) \\
&= \varphi_{k,k''}(h), \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

pour h dans H satisfaisant $\beta(0_k) <_H h <_H \beta(1_k)$. Et les autres cas sont faciles.

Il reste la condition (1.30). Elle est facile dans la plupart des cas, à savoir
- pour $h <_H \beta(0_k)$, le maximum est $\beta(1_{\gamma(h)})$,
- pour $\beta(0_k) \leqslant_H h \leqslant_H \beta(0_{k'})$, le maximum est $\beta(0_k)$,
- pour $\beta(1_{k'}) \leqslant_H h$ le maximum est $\beta(1_{\gamma(h)})$.

Supposons maintenant $\beta(0_{k'}) <_H h <_H \beta(1_{k'})$. On veut montrer que, pour chaque k, k' dans K, le maximum est $\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. On montre d'abord que cet élément appartient à $\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}((\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)) &= \beta(\beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)) \vee_{L'} 0_{k'}) \qquad (1.32) \\
&= \beta((\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k) \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&\leqslant_H \beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} (1_k \vee_{L'} 0_{k'})) \qquad \text{(distr.)} \\
&\leqslant_H h.
\end{aligned}$$

Maintenant on montre que cet élément est maximal de l'ensemble $\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$. Supposons, par contradiction, qu'il existe un élément h' dans H, avec $\gamma(h') = k$, telle que l'on a $\varphi_{k,k'}(h') \leqslant_H h$ et $\beta^{-1}(h') >_L (\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. Puisqu'on a $\gamma(h') = k$, on déduit $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} 1_k$ et le résultat $\varphi_{k,k'}(h') \leqslant_H h$ implique $\beta^{-1}(h') \vee 0_k \leqslant_{L'} h$. On déduit $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} \beta^{-1}(h)$. Donc on a $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} (\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, l'élément $\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$ est le maximum de $\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$.

On a vérifié toutes les conditions portantes sur l'application $\varphi_{k,k'}$, pour $k < k'$ dans K et maintenant il suffit de définir $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$ et $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k\vee k'}$, pour tous k, k' dans K. Par la proposition 1.9, on déduit l'existence du treillis $K \ltimes^{\varphi} H$.

Considérons maintenant

$$\tilde{L} = \{(k,h);\ k \in K,\ h \in H,\ \gamma(h) = k,\ 0_k \neq \beta^{-1}(h) \neq 1_k\}.$$

On va montrer que $\tilde{L}$ est un sous-treillis de $K \ltimes^{\varphi} H$ et qu'il est isomorphe au treillis L. Soient $(k,h), (k',h')$ des éléments arbitraires de $\tilde{L}$. Alors, pour l'élément $(k,h) \vee_{K\ltimes^{\varphi}H}$

(k', h'), on a, par définition,

$$\begin{aligned}
&(k \vee_K k', \varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k',k}(h')) \\
&= (k \vee_K k', \beta_{k\vee k'}(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta_{k\vee k'}(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_k)) \\
&= (k \vee_K k', \beta_{k\vee k'}(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_k \vee_{L'} 0_{k'})) \\
&= (k \vee_K k', \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h'))).
\end{aligned}$$

On voit que $\alpha(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h'))$ est $k \vee_K k'$. En plus, les résultats $\beta^{-1}(h) \in L$ et $\beta^{-1}(h') \in L$ impliquent $\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h') \notin \{0_{k\vee k'}, 1_{k\vee k'}\}$. Par conséquent, l'élément $(k, h) \vee_{K\ltimes^\varphi H} (k', h')$ appartient à l'ensemble $\tilde{L}$.

Pour montrer le même résultat pour l'opération inf, il faut une définition de ψ, semblable à celle de φ. On a déjà montré que, d'après (1.31), pour tous k, k' dans K satisfaisant $0_k \neq \beta^{-1}(h) \neq 1_k$ et $\gamma(h) = k$, on a $\psi_{k',k}(h) = \beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. Alors, la démonstration que l'élément $(k, h) \wedge_{K\ltimes^\varphi H} (k', h')$ reste dans $\tilde{L}$ est semblable à celle pour l'opération du sup.

Il nous reste une dernière chose à montrer, à savoir que le treillis L est isomorphe au treillis $\tilde{L}$. On définit une application $f : L \to \tilde{L}$ qui envoie a sur $(\alpha(a), \beta(a))$. Cette application est une bijection. On doit seulement s'assurer qu'elle est un homomorphisme. Considérons a, b dans L. Alors on a

$$\begin{aligned}
f(a) \vee_{K\ltimes^\varphi H} f(b) &= (\alpha(a), \beta(a)) \vee_{K\ltimes^\varphi H} (\alpha(b), \beta(b)) \\
&= (\alpha(a) \vee_K \alpha(b), \varphi_{\alpha(a),\alpha(b)}(\beta(a)) \vee_H \varphi_{\alpha(b),\alpha(a)}(\beta(b)) && (1.18) \\
&= (\alpha(a \vee_{L'} b), \beta(a \vee_{L'} 0_{\alpha(b)}) \vee_H \beta(b \vee_{L'} 0_{\alpha(a)})) && (1.32) \\
&= (\alpha(a \vee_L b), \beta(a \vee_{L'} b \vee_{L'} 0_{\alpha(a\vee_L b)}) \\
&= (\alpha(a \vee_L b), \beta(a \vee_L b)).
\end{aligned}$$

Le résultat pour l'opération inf est semblable. L'application f est donc un isomorphisme et le treillis L se plonge dans $K \ltimes^\varphi H$. ■

Exemple 1.17 On présente ici un exemple montrant comment la construction marche dans un cas particulier. Soit L le treillis de la figure 1.6. On choisit une congruence non-triviale marquée par des arêtes noires. Quand on applique la construction décrite dans la démonstration de la proposition 1.16 on obtien le treillis de la figure 1.7. Le treillis L est fini alors on n'a pas besoin de le plonger dans un treillis L' d'abord. On voit que L se plonge directement dans un produit semi-direct $K \ltimes^\varphi H$ (les sommets noirs).

1.5 Une classe de produits semi-directs

La question suivante se pose : « Quels treillis s'obtiennent comme produits semi-directs ? » On essaie de répondre à cette question en étudiant une classe de treillis close par produits semi-directs. Pour les treillis finis, il savèr la simplicité est la seule obstruction possible. On rappele que les chaînes finies sont notées $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots$

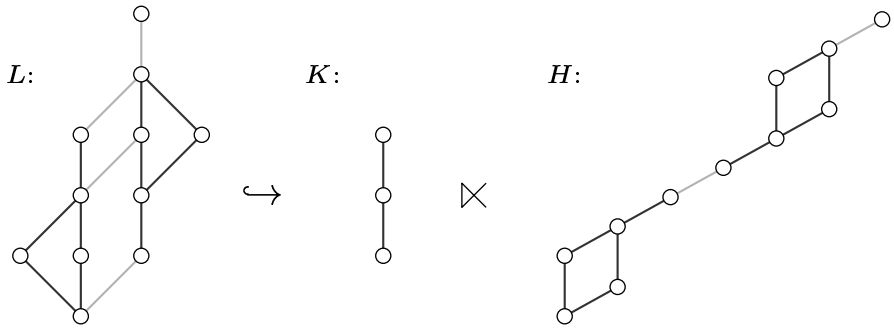


FIG. 1.6 – Treillis L, K et H

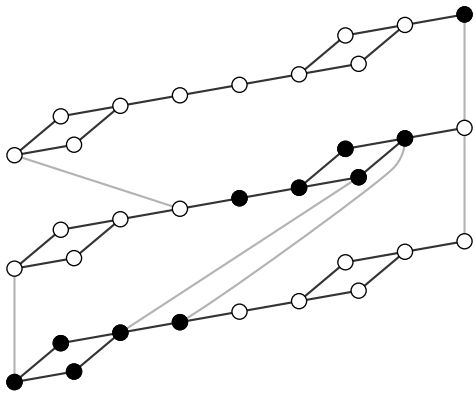


FIG. 1.7 – Le treillis L se plonge dans $K \ltimes^{\varphi} H$

Définition : On note $\mathcal{SD}$ la plus petite classe de treillis qui contient le treillis $\mathbf{2}$ et qui est close par sous-treillis, par produits semi-directs et par images isomorphes. Pour chaque L dans $\mathcal{SD}$, on définit un nombre $\tau(L)$ inductivement :

$$\tau(L) = \begin{cases} 0 & \text{pour } L \cong \mathbf{2}, \\ \min\{\, p;\ \text{il existe } K, H \text{ dans } \mathcal{SD} \text{ satisfaisants } \tau(K) < p, & \\ \qquad \tau(H) < p \text{ et } L \hookrightarrow K \ltimes^{\varphi}_{\psi} H \text{ pour des certains } \varphi, \psi \,\} & \text{si non.} \end{cases} \tag{1.33}$$

Le nombre $\tau(L)$ dit, combien de produits semi-directs sont nécessaires pour obtenir le treillis L à partir du treillis $\mathbf{2}$.

Exemple 1.18 Si on fait le produit semi-direct du treillis $\mathbf{k}$ et du treillis $\mathbf{n}$ en utilisant le produit semi-direct de l'exemple 1.6, on obtient le treillis $\mathbf{kn}$. On voit donc par récurrence que le treillis $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbf{k}}}$ s'obtient en k étape, à partir du treillis $\mathbf{2}$. Il est facile de voir qu'un produit semi-direct quelconque d'un treillis en k élément et d'un treillis en n éléments

a $k \times n$ éléments. Donc on a forcemment $\tau(\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbf{k}}}) \geqslant k$ et pour chaque chaîne $\mathbf{n}$, on a $\tau(\mathbf{n}) = \lceil \log_2(\log_2(n)) \rceil$.

Définition : Un treillis S est dit *simple* si $S \times S$ et id_S sont les seules congruences sur S. On dit que le treillis S est un treillis *simple non trivial,* si S est simple et S possède au moins trois éléments.

Exemple 1.19 Il est facile de vérifier que le treillis M_3 de la figure 1.8 est simple : notons 0, a, b, c et 1 les éléments de M_3. Si, par exemple, l'élément a est congru à 0, alors $b \vee 0$ est congru à $b \vee a$ et donc b est congru à 1. De même, c est congru à 1 et on trouve que $b \wedge c$ est congru à $1 \wedge c$. Donc c est congru à 0. On a a congru à 0 congru à c congru à 1 congru à b et donc la congruence est trivial.

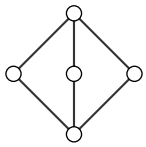


FIG. 1.8 – Le treillis M_3.

On va maintenant montrer qu'un treillis, obtenu par produit semi-direct, possède toujours une congruence canonique et donc, s'il a plus de deux éléments, il ne peut jamais être simple.

Lemme 1.20 *Soit S un treillis simple. Soit L un produit semi-direct $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$, où K, H sont des treillis. Si le treillis S se plonge dans L, alors S se plonge dans K ou dans H.*

DÉMONSTRATION : Soit θ la congruence canonique sur L et soit S' un sous-treillis de L, isomorphe au treillis S. La relation restreinte $\theta|_{S'}$ est une congruence sur S'. Puisque S' est simple, il n'y a que deux possibilités : soit on a $S'/_{\theta} \cong \mathbf{1}$ et donc S' se plonge dans H, soit θ est triviale et donc S' se plonge dans K. ■

Corollaire 1.21 *La classe $\mathcal{SD}$ ne contient aucun treillis simple non-trivial.*

DÉMONSTRATION : Supposons, en but d'une contradiction, qu'il existe un treillis simple non-trivial S dans $\mathcal{SD}$. Puisque l'on a $S \ncong \mathbf{2}$, on trouve $\tau(S) \geqslant 1$. Il existe alors des treillis K, H dans $\mathcal{SD}$, avec $\max\{\tau(K), \tau(H)\} < \tau(S)$ et $S \hookrightarrow K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ pour φ, ψ convenables. D'après le lemme 1.20, on a $S \hookrightarrow K$ ou $S \hookrightarrow H$. Alors, par définition, on a $\tau(S) \leqslant \tau(K)$ or $\tau(S) \leqslant \tau(H)$, ce qui contredit le choix des treillis K et H. ■

On peut même obtenir un résultat plus fort, à savoir que les images homomorphes des treillis de $\mathcal{SD}$ ne sont pas des treillis simples non-triviaux.

Lemme 1.22 *Soit L un treillis de $\mathcal{SD}$ et soit L' une image homomorphe du treillis L. Si L' contient au moins trois éléments, alors L' n'est pas simple.*

DÉMONSTRATION : Supposons, en vue d'une contradiction, qu'il existe un treillis L dans $\mathcal{SD}$ qui est envoyé par un épimorphisme f sur un treillis nontrivial S. Supposons que le nombre $\tau(L)$ est le plus petit possible. Par définition, $\tau(L)$ est au moins 1 et donc il existe des treillis K, H dans $\mathcal{SD}$, satisfaisant $\tau(L) > \max\{\tau(K), \tau(H)\}$ et $L \hookrightarrow K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Notons g l'épimorphisme canonique de $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ sur K. L'homomorphisme g induit une congruence η sur le treillis L. On note θ l'image de la congruence η par l'homomorphisme f. Cette relation est une congruence sur S. Puisque S est simple, il n'y a que deux possibilités : si θ est $S \times S$, tout le treillis L est dans une classe de congruence et donc L est un sous-treillis de H, ce qui est impossible. Alors on sait que la congruence θ est plus petite que la congruence associée à f. Donc il existe un homomorphisme h de $g(L)$ vers S satisfaisant $h \circ g = f$. L'application f est un épimorphisme et donc h est aussi un épimorphisme. Donc $g(L)$, qui est un sous-treillis de K, s'envoie sur S, et ceci contredit la minimalité de $\tau(L)$. ■

On va montrer que la classe $\mathcal{SD}$ est close aussi par image homomorphe. Pour cela, on utilise le résultat de la proposition 1.16. Il faut d'abord montrer que la classe $\mathcal{SD}$ est close par somme ordinale finie.

Lemme 1.23 *Soient $L_1, L_2, \ldots, L_n$, pour n dans $\mathbb{N}$, des treillis de $\mathcal{SD}$. Alors le treillis $\sum_{i=1}^{n} L_i$ appartient aussi à $\mathcal{SD}$.*

DÉMONSTRATION : Sans perte de généralité, on suppose $n = 2$. On montre d'abord que le treillis $\mathbf{1} + L_2$ appartient à $\mathcal{SD}$. On considère le produit cartésien $L_2 \times \mathbf{2}$ avec l'ordre produit et on définit un treillis K par $K = \{(0_{L_2}, 0_{\mathbf{2}})\} \cup \{(l, 1_{\mathbf{2}});\ l \in L_2\}$. On trouve facilement $K \cong (\mathbf{1} + L_2)$.

Considérons maintenant le produit semi-direct $K \ltimes_{\varphi} L_1$, avec $\varphi_{k,k'}(l) = 0_{L_1}$, pour tous $k < k'$ dans K et l dans L_1. Définissons K' comme le sous-treillis $\{(0_K, l);\ l \in L_1\} \cup \{(k, 0_{L_1});\ k > 0_K\}$, on voit que K' est isomorphe au treillis $L_1 + L_2$. ■

Avec ce lemme on peut maintenant montrer le résultat suivant :

Lemme 1.24 *Soit L un treillis dans $\mathcal{SD}$. Si un treillis L' est une image homomorphe de L, alors L' appartient aussi à $\mathcal{SD}$.*

DÉMONSTRATION : Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe un treillis L dans $\mathcal{SD}$, un treillis L' hors de $\mathcal{SD}$ et un homomorphisme f de L sur L'. Soit L' minimal par rapport au nombre d'éléments. D'après le lemme 1.22, le treillis L' n'est pas simple et donc il existe une congruence nontriviale θ sur L'. Le treillis $L'/_{\theta}$ est une image homomorphe du treillis L, il a moins d'éléments que le treillis L' donc, par hypothèse de minimalité de L', le treillis $L'/_{\theta}$ appartient à $\mathcal{SD}$. Toutes les classes de congruence θ sont des treillis qui ont moins d'éléments que L'. De plus, elles sont toutes des images homomorphes des sous-treillis de L par l'homomorphisme f et donc elles appartiennent à $\mathcal{SD}$. D'après le lemme 1.23, chaque treillis obtenu comme une somme ordinale de classes de la congruence θ appartient aussi à $\mathcal{SD}$. La proposition 1.16 montre maintenant que L' se plonge

dans un produit semi-direct de $L'/_\theta$ et d'une somme ordinale de classes d'équivalence de θ. C'est une contradiction puisque L' était supposé ne pas appartenir à la classe $\mathcal{SD}$. ■

Définition : On dit qu'une classe de treillis $\mathcal{C}$ est *close par suite exacte courte* si un treillis L appartient à $\mathcal{C}$ dès qu'il possède une congruence θ telle que le treillis $L/_\theta$ et toutes les classes de la congruence θ appartiennent à $\mathcal{C}$.

On peut rassembler tout ce que l'on sait de la classe $\mathcal{SD}$ sous la forme suivante :

Proposition 1.25 *Soit L un treillis fini. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) le treillis L appartient à $\mathcal{SD}$;
(ii) le treillis L ne contient aucun sous-treillis qui s'envoie sur un treillis simple non trivial ;
(iii) le treillis L appartient à la plus petite classe qui contient $\mathbf{2}$ et qui est close par sous-treillis, par suite exacte courte et par image isomorphe ;
(iv) le treillis L appartient à la plus grande classe de treillis, close par sous-treillis et par image homomorphe, qui ne contient aucun treillis simple nontrivial.

DÉMONSTRATION : L'implication $(i) \Rightarrow (ii)$ est exprimée par le corollaire 1.21. La direction opposée se montre par induction sur le nombre d'éléments. Soit L un treillis qui satisfait (ii). Le treillis L a plus que trois éléments, alors il n'est pas simple et il existe une congruence non-triviale sur L. Le quotient et les classes d'équivalence doivent satisfaire la condition (ii) et, par hypothèse d'induction, ils appartiennent à $\mathcal{SD}$. Le reste résulte de la proposition 1.16.

L'implication $(i) \Rightarrow (iii)$ est évidente et la reciproque est vraie, d'après la proposition 1.16. Maintenant $(i) \Rightarrow (iv)$ résulte du corollaire 1.20 et de la proposition 1.24. Enfin, $(iv) \Rightarrow (ii)$ est immédiat. ■

La même approche peut être considérée pour des demi-treillis. On ne va pas montrer tous les résultats particuliers, on énonce uniquement le résutat final :

Proposition 1.26 *La classe de sup-demi-treillis engendrée par le demi-treillis $\mathbf{2}$, qui est close par sous-demi-treillis et par produit semi-direct, est la classe de tous les sup-demi-treillis finis.*

DÉMONSTRATION : Le résultat analogue à la proposition 1.25 est valable pour les sup-demi-treillis. Comme il n'existe aucun sup-demi-treillis simple avec plus de deux éléments, on déduit la proposition. ■

On va maintenant dire quelques mots sur la classe $\mathcal{SD}$ du point de vue des variétés et des quasi-variétés.

Définition : On dit qu'une classe de treillis $\mathcal{C}$ est une *variété* si elle est close par sous-treillis, par produit direct et par image homomorphe. On dit que la classe $\mathcal{C}$ est une *quasi-variété* si elle est close par sous-treillis, par produit direct et par image isomorphe.

On sait que la classe $\mathcal{SD}$ est l'intersection d'une quasi-variété et de la classe des treillis finis : la quasivariété est la clôture de $\mathcal{SD}$ par produit infini et par sous-treillis. On veut savoir si $\mathcal{SD}$ n'est pas intersection d'une variété avec la classe des treillis simples. Pour répondre à cette question, on décrit le rapport entre la classe $\mathcal{SD}$ et la classe des treillis sup-semi-distributifs.

Définition : Un treillis L est dit *sup-semi-distributif* s'il vérifie, pour tous x, y, z dans L, la quasi-identité suivante :

$$x \vee y = x \vee z \text{ entraîne } x \vee y = x \vee (y \wedge z). \tag{1.34}$$

Un treillis L est dit *inf-semi-distributif* s'il vérifie la quasi-identité duale.

Lemme 1.27 *Les classes des treillis sup-semi-distributifs finis et des treillis inf-semi-distributifs finis sont des sous-classes propres de la classe $\mathcal{SD}$.*

DÉMONSTRATION : Chaque treillis sup-semi-distributif simple est trivial (voir [32]). La classe des treillis sup-semi-distributifs forme une quasi-variété (voir [32]). Chaque image homomorphe d'un treillis sup-semi-distributif fini est aussi sup-semi-distributif (voir [21]). Alors proposition 1.25 (*ii*) montre que chaque treillis sup-semi-distributif fini appartient à $\mathcal{SD}$. Il reste à montrer qu'il existe un treillis dans $\mathcal{SD}$ qui n'est pas sup-semi-distributif. Le treillis L_3 da la figure 1.9 n'est pas sup-semi-distributif (voir [32]). Mais il se plonge dans le produit semi-direct $\mathbf{3} \ltimes_{\psi}^{\varphi} \mathbf{3}$ de l'exemple 1.7. Par conséquent, le treillis L_3 est un treillis de $\mathcal{SD}$ qui n'est pas sup-semi-distributif. Le résultat pour les treillis inf-semi-distributifs résulte de la dualité. ■

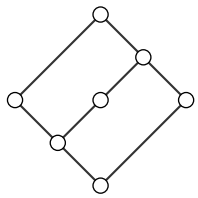


FIG. 1.9 – Le treillis L_3.

Proposition 1.28 *La plus petite quasi-variété de treillis qui contient le treillis* **2** *et qui est close par produit semi-direct n'est pas une variété.*

DÉMONSTRATION : Notons $\mathcal{DSD}$ la quasi-variété de l'énoncé. Il est connu (voir [21]) que la plus petite variété qui contient tous les treillis sup-semi-distributifs finis est la classe de tous les treillis. La classe $\mathcal{SD}$ contient tous les treillis sup-semi-distributif finis, d'après le lemme 1.27. Supposons que la classe $\mathcal{DSD}$ est close par image homomorphe. La classe $\mathcal{DSD}$ contient la classe $\mathcal{SD}$ et donc elle contient tous les treillis. Cependant, un lemme semblable au lemme 1.20 est vrai pour la classe $\mathcal{DSD}$ et donc aucun treillis simple nontrivial n'appartient à $\mathcal{DSD}$. Ceci contredit l'hypothèse que $\mathcal{DSD}$ est close par image homomorphe. ■

Ce résultat peut aussi être dit différemment : il n'existe aucune variété de treillis $\mathcal{C}$ telle que la classe $\mathcal{SD}$ est l'intersection de $\mathcal{C}$ et de la classe des treillis finis. Mais il existe une telle quasi-variété. Chaque quasi-variété est décrite par une famille de quasi-identités. Donc la question suivante se pose :

Question 1.29 Quels sont les quasi-identités qui décrivent la classe $\mathcal{SD}$?

Chapitre 2

Construction de l'ordre faible des groupes de Coxeter

Dans ce chapitre on étudie les groupes de Coxeter, une classe de groupe qui contient entre autres les groupes symétriques. Ces groupes sont munis d'un ordre partiel canonique, l'ordre faible $\preccurlyeq$. Cet ordre forme un inf-demi-treillis, dans le cas d'un groupe de Coxeter infini, ou un treillis, dans le cas d'un groupe de Coxeter fini.

Pour chaque groupe de Coxeter W et pour chaque sous-groupe parabolique standard W_J, on décrit une décomposition de l'inf-demi-treillis formé de l'ordre faible sur le groupe W en produit semi-direct de l'inf-demi-treillis de l'ordre faible sur le sous-groupe W_J et de l'ordre faible sur une classe à gauche quelconque par rapport à W_J. Cette décomposition permet, en particulier, de construire en façon effective l'ordre faible sur W à partir de celui du sous-groupe parabolique W_J standard et de la classe à gauche associée.

Dans la section 1, on rappelle quelques propriétés de base des groupes de Coxeter. Dans la section 2, on présente la construction du produit semi-direct de l'ordre faible des groupes de Coxeter dans le cas général. Enfin, dans la section 3, on décrit des exemples explicites, à savoir le groupes de types irréductible, A_n, B_n, D_n, I_m, H_3 et $\tilde{A}_2$.

2.1 L'ordre faible dans les groupes de Coxeter

Dans cette section on définit les groupes de Coxeter, l'ordre faible, les sous-groupes paraboliques standards et on présente certains résultats préparatoires utilisés dans la suite. On commence, bien entendu, par la définition d'un groupe de Coxeter.

Définition [27] : Un *graphe de Coxeter* $\Gamma = (S, A)$ est un graphe fini non-orienté dont chaque arête (s, t) de A est étiquetée par un nombre $m_{s,t}$ de l'ensemble $\{3, 4, \ldots, \infty\}$. On

dit qu'un groupe W est un *groupe de Coxeter* associé au graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$ s'il admet la présentation

$$\begin{aligned} \langle\, S;\ s^2 = 1, (st)^2 = 1 \quad & \text{pour } (s,t) \notin A, \\ (st)^{m_{s,t}} = 1, \quad & \text{pour } (s,t) \in A \text{ et } m_{s,t} < \infty \,\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

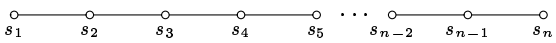
On dit qu'une paire (W, S) est un *système de Coxeter* si W est un groupe et s'il existe un graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$ auquel le groupe W est associé. Pour chaque élément g de W, on définit la *longueur* $\ell(g)$ comme la longueur minimale d'une suite $s_1, s_2, \ldots, s_k$, avec s_i dans S, satisfaisante $g = s_1 s_2 \cdots s_k$. Le mot $s_1 s_2 \cdots s_k$ est ensuite appelé une *expression réduite.*

Pour deux générateurs s et t qui commutent, on définit $m_{s,t} = 2$ pour faciliter l'écriture de la présentation. Quand on désigne un graphe de Coxeter, on omet d'habitude les étiquettes 3 qui sont les plus fréquentes.

Exemple 2.1 Un exemple typique de groupe de Coxeter est le groupe symétrique sur $n+1$ éléments, noté $\mathfrak{S}_{n+1}$. Ce groupe est engendré par les n transpositions $(i, i+1)$, notés s_i, et ces transpositions satisfont les relations

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{pour } |i-j| > 1, \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j && \text{pour } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

Ces relations constituent une présentation du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$ (voir [27]) et donc $\mathfrak{S}_{n+1}$ est un groupe de Coxeter. Le graphe de Coxeter associé est le graphe



La longueur $\ell(\pi)$ d'une permutation π est égale au nombre de paires ordonnées (i, j), avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, qui satisfont $\pi(i) > \pi(j)$, voir [12].

Il est possible de voir que, dans un groupe de Coxeter, on a $\ell(g) = 0$ si est seulement si g est l'élément neutre, que l'on a $\ell(g) = \ell(g^{-1})$ pour chaque g, et enfin que l'on a $\ell(g) + \ell(h) \geqslant \ell(g+h)$, pour tous g, h dans un groupe de Coxeter W.

Définition : Soit W un groupe de Coxeter. Pour g, h dans W, on écrit $g \preccurlyeq h$ si et seulement si on a $\ell(g) + \ell(g^{-1}h) = \ell(h)$. Cette relation est appelée l'*ordre faible* du groupe W.

Une définition équivalente est la suivante (voir [27]) : on a $g \preccurlyeq h$ s'il existe u, une expression réduite de g, et des éléments $s_1, s_2, \ldots, s_k$ dans S tels que $u s_1 s_2 \ldots s_k$ est une expression réduite de h. Cette définition rende évident que la relation $\preccurlyeq$ est un ordre partiel. Dans tout le reste du texte, les mots : « g est plus petit que h », pour g, h des éléments d'un groupe de Coxeter, signifieront toujours l'ordre faible défini ici.

Si un group de Coxeter W est fini, alors il existe exactement un élément dans W dont la longueur est maximale. Cet élément est noté w_0. Dans le cas du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, l'élément w_0 est la permutation $i \mapsto n + 1 - i$.

Proposition 2.2 [3] *Soit W un groupe de Coxeter. Alors l'ensemble $(W, \preccurlyeq)$ est un inf-demi-treillis et l'élément 1 est son plus petit élément. Si W est fini alors $(W, \preccurlyeq)$ est un treillis et l'élément w_0 est son plus grand élément.*

On voit que, dans l'ensemble $(W, \preccurlyeq)$, un élément h est un successeur immédiat de g si et seulement si on a $h = gs$, pour un s dans S. De l'autre coté, si on a $h = gs$, pour un s dans S, alors l'un des éléments g et h est un successeur immédiat de l'autre. Donc le diagramme de Hasse de $(W, \preccurlyeq)$ s'obtient à partir du graphe de Caley de W en retirant les étiquettes. Quand on construit le diagramme de Hasse de $(W, \preccurlyeq)$ et on étiquette chaque arête par le générateur associé, on obtient le graphe de Cayley du groupe W. Quand on dit « le graphe de Cayley d'un groupe de Coxeter W », cela veut dire le graphe de Cayley de W par rapport à la présentation (2.1). Comme tous les générateurs sont involutifs, pour chaque arête il existe une arête opposée, étiquetée par le même générateur. C'est pourquoi on désigne plutôt des arrêtes non orientées, au lieu de deux arêtes opposées (voir la figure 2.1).

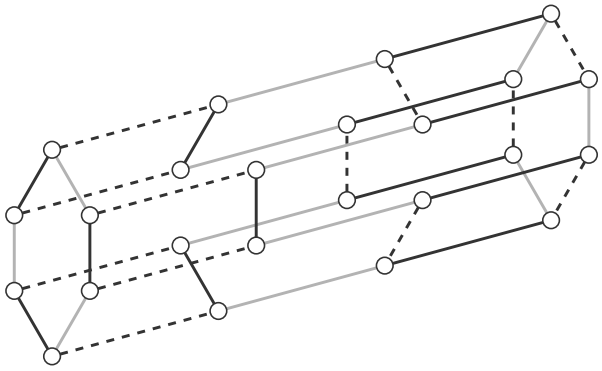


FIG. 2.1 – Le graphe de Cayley du groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$, désigné comme le diagramme de Hasse de l'ordre faible – un élément h est un successeur immédiat d'un élément g si l'arête entre eux monte de g vers h. Les arêtes noires dans ce graphe représentent la transposition (1,2), les grises représentent la transposition (2,3) et les pointillée représentent la transposition (3,4).

On introduit maintenant la notion d'un sous-groupe de W qui est engendré par une partie de générateurs de W.

Proposition 2.3 [27] *Soit W un groupe de Coxeter associé à un graphe de Coxeter $\Gamma = (S, A)$. Soit J un sous-ensemble de S. Alors le sous-groupe engendré par J est un groupe de Coxeter associé au sous-graphe de Γ engendré par J.*

Définition : Le sous-groupe mentionné dans la proposition 2.3 est noté W_J et appelé un *sous-groupe parabolique standard* de W engendré par J.

Il est utile de mentionner que la définition de ℓ ne dépend pas du groupe, dans le sens que, pour un g dans W_J les longueurs de g dans W et dans W_J sont les mêmes. De même pour l'ordre faible, pour deux éléments g et h dans W_J, on a $g \preccurlyeq h$ dans W_J si et seulement si on a $g \preccurlyeq h$ dans W.

Définition : Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. On dit qu'un élément g de W est *J-réduit* si on a $\ell(sg) = \ell(g) + 1$, pour chaque s dans J. On note W^J l'ensemble de tous les mots J-réduits dans W.

Exemple 2.4 Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est un sous-groupe parabolique standard du groupe $\mathfrak{S}_{n+1}$. Ce sous-groupe est engendré par l'ensemble $J = \{(i, i+1); i < n-1\}$. Les permutations J-réduites sont des cycles $(i, i+1, \ldots, n+1)$, pour chaque $i \leqslant n+1$.

Le résultat suivant est standard :

Lemme 2.5 [4] *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soit g un élément de W. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) L'élément g est J-réduit ;
(ii) L'élément g a la plus petite longueur dans la classe $W_J g$;
(iii) L'élément g est le seul avec la plus petite longueur dans la classe $W_J g$;
(iv) Pour chaque h dans W^J, on a $\ell(hg) = \ell(h) + \ell(g)$;
(v) Pour chaque h dans W, la relation $h \preccurlyeq g$ implique que h est J-réduit ;

Pour chaque élément g dans W, on peut trouver exactement un élément g'' qui est le seul élément J-réduit dans l'ensemble $W_J g$. Soit g' l'élément gg''^{-1}. On obtient ici une décomposition unique de l'élément g sous la forme $g'g''$, où g' appartient à W_J et g'' appartient à W^J.

Définition : Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. On définit les applications $\alpha_J : W \to W_J$ et $\omega_J : W \to W^J$ de sorte qu'on ait $g = \alpha_J(g)\omega_J(g)$ pour chaque g dans W.

Utilisant la définition avec lemme 2.5 on obtient directement la proposition suivante :

Proposition 2.6 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Alors l'application $g \mapsto \big(\alpha_J(g), \omega_J(g)\big)$ est une bijection entre l'ensemble W et l'ensemble $W_J \times W^J$.*

On finit cette section par un résultat classique :

Lemme 2.7 [18] *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soit h dans W^J et soit s dans S. Alors exactement une des situations suivantes ce produit :*
(i) on a $\ell(h) \geqslant \ell(hs)$, dans ce cas là, l'élément hs est aussi J-réduit ;
(ii) on a $\ell(h) \leqslant \ell(hs)$ et hs appartient W^J ;
(iii) on a $\ell(h) \leqslant \ell(hs)$ et hs n'appartient pas à W^J, dans ce cas là, il existe un s' dans J satisfaisant $hs = s'h$.

2.2 Produits semi-directs dans les groupes de Coxeter

Dans cette section on étudie la décomposition d'un groupe de Coxeter liée aux applications α_J et ω_J. On montre que cette décomposition met en jeu un produit semi-direct de demi-treillis.

Lemme 2.8 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soient g, h dans W. Alors*
(i) $g \preccurlyeq h$ implique $\alpha_J(g) \preccurlyeq \alpha_J(h)$ et $\omega_J(g) \preccurlyeq \omega_J(h)$;
(ii) si h est un successeur immédiat de g dans W alors on a soit $\alpha_J(g) = \alpha_J(h)$ soit $\omega_J(g) = \omega_J(h)$;
(iii) on a $\alpha_J(g \wedge h) = \alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)$.

DÉMONSTRATION : Les résultats (i) et (ii) sont des conséquences du lemme 2.7.

(iii) D'après le résultat (i), on a $\alpha_J(g \wedge h) \preccurlyeq \alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)$. Mais on a $\alpha_J(g) \preccurlyeq g$ et $\alpha_J(h) \preccurlyeq h$ et donc $\alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h) \preccurlyeq g \wedge h$ est vrai. En appliquant α_J à cette inégalité, on obtient $\alpha_J(\alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)) \preccurlyeq \alpha_J(g \wedge h)$. Mais α_J est l'identité sur W_J et donc on a $\alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g \wedge h)$. ■

Alors l'application α_J est compatible avec l'inf, c'est-à-dire qu'elle est un endomorphisme de l'inf-demi-treillis $(W, \wedge)$. Dans le lemme suivant on regarde le diagramme de Hasse de $(W, \preccurlyeq)$ comme le graphe de Cayley de W.

Lemme 2.9 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Pour g, h dans W, définissons une relation θ_J par $(g, h) \in \theta_J \Leftrightarrow \alpha_J(g) = \alpha_J(h)$. La relation θ_J est une congruence de l'inf-demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ et le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)/_{\theta_J}$ est isomorphe au demi-treillis $(W_J, \preccurlyeq)$. Toutes les classes d'équivalence sont isomorphes comme treillis et, de plus, quand on ajoute les étiquettes, les graphes étiquetés associés sont aussi isomorphes.*

DÉMONSTRATION : On sait que α_J est un homomorphisme de $(W, \preccurlyeq)$ sur $(W_J, \preccurlyeq)$. Donc θ_J est une congruence et $(W, \preccurlyeq)/_{\theta_J}$ est isomorphe à $(W_J, \preccurlyeq)$. Il reste à montrer que les classes sont isomorphes. Quand on a $a \neq b$ dans W_J alors il existe une bijection $\eta_{a,b}$ entre la classe contenant a et la classe contenant b. Cette bijection envoie ag vers bg pour chaque g dans W^J. Mais cette bijection préserve l'ordre $\preccurlyeq$: pour tous g, h dans W^J, on a $ag \preccurlyeq ah \Leftrightarrow g \preccurlyeq h \Leftrightarrow bg \preccurlyeq bh$, d'après le lemme 2.5. Alors, la bijection $\eta_{a,b}$ est un isomorphisme de treillis. Il est évident que $\eta_{a,b}$ préserve aussi l'étiquetage : l'arête de ag vers agx est étiquetée par le générateur x et c'est aussi vrai pour l'arête de bg vers bgx. ■

Tous les résultats préliminaires sont maintenant disponibles, et on peut montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 2.10 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Alors l'inf-demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe à un produit semi-direct des demi-treillis $(W_J, \preccurlyeq)$ et $(W^J, \preccurlyeq)$.*

DÉMONSTRATION : On obtient le résultat en appliquant la proposition 1.14, version inf-demi-treillis, avec les lemmes 2.8 et 2.9. ■

Dans le cas d'un groupe de Coxeter fini W, l'ensemble ordonné $(W, \preccurlyeq)$ est un treillis, et donc on veut savoir si l'application α_J est aussi compatible avec l'opération de sup. C'est le cas, on montre que l'application α_J est compatible avec le sup et donc que α_J est un endomorphisme de $(W, \preccurlyeq)$. On peut même formuler le résultat plus généralement et ne pas supposer que W soit fini.

Lemme 2.11 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soient g, h dans W tels que $g \vee h$ existe. Alors $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)$ existe et on a $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h) = \alpha_J(g \vee h)$.*

DÉMONSTRATION : On a $\alpha_J(g) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$ et $\alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$ donc le sup doit exister. En plus, on a $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$. De $g \preccurlyeq g \vee h$ et la définition de ψ, on obtient $\omega_J(g) \preccurlyeq \psi_{\alpha_J(g\vee h),\alpha_J(g)}(\omega_J(g \vee h))$. Considérons maintenant l'élément $j = \psi_{\alpha_J(g\vee h),\alpha_J(g)\vee\alpha_J(h)}(\omega_J(g \vee h))$. La remarque précédente avec le lemme 1.15 (iii) donnent $\omega_J(g) \preccurlyeq \psi_{\alpha_J(g)\vee\alpha_J(h),\alpha_J(g)}(j)$ qui implique $g \preccurlyeq (\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)j)$. La même chose peut être dite à propos de h et donc $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)j$ est une borne supérieure de g et h et on a $\alpha_J(g \vee h) \preccurlyeq \alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)$. ■

On peut maintenant formuler le résultat similaire au théorème 2.10 pour les treillis des groupes de Coxeter finis :

Théorème 2.12 *Soit (W, S) un système de Coxeter tel que W est fini et soit J une partie de S. Alors le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe à un produit semi-direct des treillis $(W_J, \preccurlyeq)$ et $(W^J, \preccurlyeq)$.*

DÉMONSTRATION : L'application α_J est compatible avec les deux opérations de treillis et donc il s'agit d'un homomorphisme. Ensuite, le théorème résulte de la proposition 1.4. ■

On sait maintenant que le graphe de Cayley d'un groupe de Coxeter est un produit semi-direct mais on ne sait pas exactement lequel, il faut décrire l'application ψ. On va faire un algorithme qui construit éffectivement cette application dans le cas d'un groupe de Coxeter W spécifique. Pour cela on présent un lemme auxiliaire :

Notation : On note $[s, s'\rangle^m$ pour $\underbrace{ss'ss'\cdots}_{m \text{ facteurs}}$ et $\langle s, s']^m$ pour $\underbrace{\cdots ss'ss'}_{m \text{ facteurs}}$.

Lemme 2.13 [4] *Soit (W, S) un système de Coxeter. Soit g dans W et soient $s \neq s'$ dans S.*
(i) Si on a $\ell(gs) = \ell(gs') = \ell(g) + 1$ alors l'élément $(gs) \vee (gs')$ existe si et seulement si le nombre $m_{s,s'}$ est fini ; dans ce cas là on a $(gs) \vee (gs') = g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$.
(ii) Si on a $\ell(gs) = \ell(gs') = \ell(g) - 1$ alors le nombre $m_{s,s'}$ est fini et on a $(gs) \wedge (gs') = g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$.

On a remarqué dans le lemme 1.15 qu'il suffit de faire la description pour (k', h) un successeur immédiat d'un élément $(k, \psi_{k',k}(h))$. D'après le lemme 2.8 (ii), on a forcement $h = \psi_{k,k'}(h)$.

Définition : Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Un triplet $((k, h), (k', h), s)$, avec k et k' dans W_J, h dans W^J et s dans S, est appelé un *triplet spécial* si l'élément k' est un successeur immédiat de k dans W_J, l'élément $k'h$ est un successeur immédiat de kh dans W et on a $k'h = khs$. On note $T_{k,k'}$ l'ensemble de tous les triplets spéciaux sous la forme $((k, h), (k', h), s)$ avec h dans W^J et s dans S.

Notre but est de décrire l'application ψ. D'après ce que l'on a vu, il suffit de décrire les triplets spéciaux.

Lemme 2.14 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soit g dans W^J et soit s dans S tel que l'élément gs n'est pas J-réduit. Supposons qu'un générateur s' dans S satisfait $g \preccurlyeq gs'$, que l'élément gs' est J-réduit et que $m_{s,s'}$ est fini. Alors l'élément $g[s, s']^{m_{s,s'}}$ est un successeur immédiat de l'élément $g[s', s]^{m_{s,s'}-1}$, et l'élément $g[s', s]^{m_{s,s'}-1}$ est J-réduit.*

DÉMONSTRATION : On sait que l'élément gs n'est pas J-réduit et, d'après le lemme 2.7, l'élément $t = \alpha_J(gs)$ est dans S. Ensuite, le lemme 2.13 donne $(gs) \vee (gs') = g[s, s']^{m_{s,s'}}$. Puisque l'application α_J est compatible avec le sup, on trouve $\alpha_J(g[s, s']^{m_{s,s'}}) = t$. Nécessairement on a $\alpha_J(g[s', s]^{m_{s,s'}-1}) \preccurlyeq t$. Si cette relation était une égalité, l'élément $(g[s', s]^{m_{s,s'}-1}) \wedge (gs)$, qui est g, serait J-réduit. Donc $\alpha_J(g[s', s]^{m_{s,s'}-1})$ est strictement plus petit que t, et cela implique que $g[s', s]^{m_{s,s'}-1}$ est J-réduit. ■

Lemme 2.15 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soit $g \neq 1$ dans W^J et soit s dans S tel que l'élément gs n'est pas J-réduit. Alors il existe $g' \preccurlyeq g$ et s' dans S tels que $m_{s,s'}$ est fini, on a $g'[ss']^{m_{s,s'}} = gs$ et ou bien l'élément $g's$ ou bien l'élément $g's'$ est J-réduit.*

DÉMONSTRATION : Il existe un s' dans S satisfaisant $gs' \preccurlyeq g$. D'après le lemme 2.7, il existe un élément t dans S qui satisfait $tg = gs$. Donc on a $gss' = tgs' \preccurlyeq tg = gs$. Notons g' l'élément $g \wedge gss'$. D'après le lemme 2.13, on a $g' = gss \wedge gss' = gs[s, s']^{m_{s,s'}} = g[s', s]^{m_{s,s'}-1}$. Les éléments g' et $g[s', s]^{m_{s,s'}-2}$ sont J-réduits, d'après le lemme 2.5 (v). Maintenant, l'élément $g's$ est un des éléments $g[s', s]^{m_{s,s'}-2}, g[s, s']^{m_{s,s'}}$ et l'élément $g's'$ est l'autre. Puisqu'on a $gs = g'[s, s']^{m_{s,s'}} = g's \vee g's'$, nécessairement $g[s, s']^{m_{s,s'}}$ n'est pas J-réduit. ■

Proposition 2.16 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Soit k dans W_J et soit s dans J satisfaisant $k \preccurlyeq ks$. Soit $h \neq 1$ dans W^X. Alors l'élément ksh est un successeur immédiat de l'élément kh si et seulement s'il existe $g \preccurlyeq h$ et s', s'' dans S tels que $m_{s',s''}$ est fini, et on a $kg[s', s'']^{m_{s',s''}-1} = kh$ et $\alpha_J(kgs'') = ks$. En plus, on a $ksh = khs'$, pour $m_{s',s''}$ impair, et $ksh = khs''$, pour $m_{s',s''}$ pair.*

DÉMONSTRATION : Le résultat ne se change pas si on multiplie tous les éléments par k^{-1} à gauche. Par conséquent, l'équivalence démontrée peut être formulée comme suit : sh est un successeur immédiat de h si et seulement s'il existe $g \preccurlyeq h$ et s', s'' dans S tels que $m_{s',s''}$ est fini, on a $g[s', s'']^{m_{s',s''}-1} = h$ et $\alpha_X(gs'')$ est égal à s. La direction '$\Leftarrow$' résulte directement du lemme 2.14 et la direction '$\Rightarrow$' résulte directement des lemmes 2.8 (ii) et 2.15. Donc on doit seulement montrer la relation $sh = hs'$ (resp. $sh = hs''$). Supposons $m_{s',s''}$ impair. On sait que $\alpha_J(gs'')$ est s. Donc il existe un élément g' dans W^X tel que sg' est une successeur immédiat de g. D'après le lemme 2.8, on a $g' = g$. Maintenant on trouve

$$sh = sg[s', s'']^{m_{s',s''}-1} = gs''[s', s'']^{m_{s',s''}-1} = g[s', s'']^{m_{s',s''}} = g[s', s'']^{m_{s',s''}-1}s' = hs'.$$

Le cas de $m_{s',s''}$ pair est semblable. ■

On déduit de la proposition 2.16 une méthode algorithmique pour construire récursivement l'ensemble $T_{k,k'}$. D'après le lemme 1.15, cet ensemble détermine entièrement l'application ψ du produit semi-direct considéré.

Algorithme 2.17 Soit (W, S) un groupe de Coxeter et soit J une partie de S. Fixons un ordre total $\leqslant$ sur W^J qui étend l'ordre $\preccurlyeq$. Soit $k \preccurlyeq k'$ deux éléments dans W_J, avec $k' = ks$ pour un élément s dans S. On construit un ensemble T de triplets de la forme $((k, h), (k', h), s')$ avec h dans W^J et s' dans S, de la façon suivante : On initialise T à $\{((k, 1), (k', 1), s)\}$. On procède par induction sur la longueur de h dans W^J, en commençant par $h = 1$. Supposons $((k, h), (k', h), s') \in T$. On considère successivement tous les éléments s'' dans S qui satisfont $hs'' \in W^J$ et $m_{s',s''} < \infty$: pour chaque tel élément, on ajoute à l'ensemble T le triplet

$$((k, h[s'', s']^{m_{s',s''}-1}),\ (k', h[s'', s']^{m_{s',s''}-1}),\ s'), \tag{2.2}$$

pour $m_{s',s''}$ pair, ou le triplet

$$((k, h[s'', s']^{m_{s',s''}-1}),\ (k', h[s'', s']^{m_{s',s''}-1}),\ s''), \tag{2.3}$$

pour $m_{s',s''}$ impair. Ensuite on continue avec l'élément h suivant dans l'ordre total $\leqslant$.

Lemme 2.18 *L'algorithme 2.17 fournit l'ensemble $T_{k,k'}$.*

DÉMONSTRATION : On montre d'abord que chaque élément de T appartient à $T_{k,k'}$. On a $ks = k'$ et donc $((k, 1), (k', 1), s)$ est un triplet spécial. Ensuite, si $((k, h), (k', h), s')$ est un triplet spécial alors, d'après la proposition 2.16, le triplet de (2.2) ou de (2.3) est un triplet spécial.

De l'autre côté, on montre par induction sur h que chaque triplet spécial appartient à T. Le résultat est vrai pour le triplet $((k, 1), (k', 1), k^{-1}k)$. Supposons $((k, h), (k', h), s')$ dans $T_{k,k'}$ avec $h \neq 1$. La proposition 2.16 assure l'existence d'un s'' dans S et $g \preccurlyeq h$ dans W^J qui satisfait $g\langle s', s'']^{m_{s',s''}-1} = h$ et $k'g = kgt$, où t est soit s' soit s''. On a $g < h$, le triplet $((k, g), (k', g), t)$ est triplet spécial et donc, par hypothèse d'induction, ce triplet appartient à T. Le triplet $((k, h), (k', h), s')$ est obtenu à partir du triplet $((k, g), (k', g), t)$ en utilisant (2.2) ou (2.3) et donc il appartient à T. ■

Proposition 2.19 *Soit (W, S) un système de Coxeter et soit J une partie de S. Alors l'opération d'inf dans le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est être déterminée à partir des opérations d'inf dans les demi-treillis W_J et W^J par la formule*

$$(k, h) \wedge (k', h') = (k \wedge k', \psi_{k,k'}(h) \wedge \psi_{k',k}(h')). \tag{2.4}$$

où l'application ψ est donné par l'algorithme 2.17.

DÉMONSTRATION : La formule (2.4) est la définition (1.18) de l'inf d'un produit semi-direct de demi-treillis. Étant données les opérations de l'inf dans les sous-treillis W_J et W^J, il faut seulement déterminer l'application ψ. D'après les résultats du chapitre 1, cette application est construite de la façon suivante :
- pour $k' \preccurlyeq k$, l'application $\psi_{k',k}$ est l'identité, d'après (1.6) et (1.15) ;
- pour k, k' incomparable, on a $\psi_{k',k} = \psi_{k',k\wedge k'}$, d'après (1.15) ;
- pour $k \prec k'$, si $s_1 s_2 \cdots s_k$ est une expression réduite de l'élément $k^{-1}k'$ et on compte, d'après le lemme 1.15 (i) :

$$\psi_{k',k} = \psi_{s_1,1} \circ \psi_{s_1 s_2, s_1} \circ \psi_{s_1 s_2 s_3, s_1 s_2} \circ \cdots \circ \psi_{s_1 s_2 \cdots s_k, s_1 s_2 \cdots s_{k-1}}; \tag{2.5}$$

- pour k', un successeur immédiat de k, on a, d'après le lemme 1.15 (ii) :

$$\psi_{k',k}(h) = \max\{h' \in W^J;\ (h' \preccurlyeq h) \text{ et } (((k, h'), (k', h'), s) \in T_{k,k'}),\ \text{pour un } s \in S\}. \tag{2.6}$$

La construction de l'ensemble $T_{k,k'}$ est faite par l'algorithme 2.17. ■

Le résultat analogue peut être formulé pour l'opération de sup dans le cas d'un groupe de Coxeter fini.

La structure de l'ensemble $T_{k,k'}$ dépend seulement de l'élément $k^{-1}k'$, noté s, et ne pas vraiment du couple k, k'. Plus précisément, pour un élément h dans W^J et s' dans S, un triplet $((k, h), (k', h), s')$ appartient à $T_{k,k'}$ si et seulement si le triplet $((1, h), (s, h), s')$ appartient à l'ensemble $T_{1,s}$. Donc on déduit que l'application $\psi_{k',k}$ est égale à l'application $\psi_{k^{-1}k',1}$ et donc il suffit de décrire l'application ψ (et les triplets spéciaux) dans le cas des couples $(s, 1)$, avec s dans J.

Remarque 2.20 Dans [41], l'ordre faible d'un groupe de Coxeter fini W est construit en utilisant une application f de $W^J \times J$ vers $S \cup \{\emptyset\}$, définit comme suit : si ks est successeur immédiat de k dans W^J, avec s dans X, alors, pour chaque h dans W^X, soit $f(h, s)$ est vide et ksh n'est pas un successeur de kh, soit on a $ksh = khf(h, s)$. Cette méthode est équivalente à la nôtre : pour chaque ensemble de triplets spéciaux, on définit $f(h, s)$ comme étant s' si $((1, h), (s, h), s')$ est un triplet spécial, ou comme $\emptyset$ si sh n'est pas plus grand que h. La différence est que Le Conte de Poly-Barbut introduit sa méthode par une approche directe combinatoire et qu'il n'est pas évident, comment de construire les opérations sup et inf à partir de l'application f et de l'application d'inf de treillis composants.

2.3 Exemples de groupes de Coxeter

Dans cette section on présente le produit semi-direct de l'ordre faible pour des cas particuliers de groupes de Coxeter. On fait la construction pour toutes les familles infinies des groupes de Coxeter finis et aussi pour un groupe fini exceptionnel et pour un groupe infini.

Dans tous les cas, on choisit un sous-ensemble J de sorte que l'ensemble d'éléments J-réduits soit facile à décrire. Les descriptions des ensembles W^J peuvent être trouvées dans [23] et c'est pourquoi on ne donne pas ici des démonstrations précises de formes des ensembles W^J. On décrit aussi les applications φ et ψ qui sont déterminées par des triplets spéciaux de $T_{k,k'}$. Il suffit de décrire uniquement les triplets T_{1,s_1} qui seront notés T_{s_1}.

L'ensemble T_{s_1} décrit l'application φ_{1,s_1} et on donne, dans les cas principaux, le sous-graphe du graphe de Cayley qui corresponde aux ensembles W^J et s_iW^J et qui donc illustre bien l'application φ_{1,s_1}. Après, puisque le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct de W_J et W^J, on obtient le graphe de Cayley de W en remplaçant chaque sommet du graphe de Cayley de W_J par le graphe de Cayley de W^J et en remplaçant chaque arête de W_J par les arêtes correspondantes aux triplets spéciaux.

2.3.1 Types réductibles

Définition : On dit qu'un groupe de Coxeter est *réductible* si le graphe de Coxeter associé n'est pas connexe.

Ce cas de groupe de Coxeter est facile parce que les sous-groupes paraboliques associés aux composantes du graphe de Coxeter commutent l'un avec l'autre.

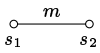
Proposition 2.21 *Soit Γ un graphe de Coxeter non connexe. Notons W le groupe de Coxeter associé à Γ. Notons $\Gamma_1 = (S_1, A_1), \ldots, \Gamma_k = (S_k, A_k)$ les composantes connexes du graphe Γ et notons W_i le groupe engendré par S_i, pour i entre 1 et k. Alors, le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe au produit direct $\prod_{i=1}^{k}(W_i, \preccurlyeq)$.*

DÉMONSTRATION : Puisque les ensembles S_i commutent deux à deux, les groupes W_i commutent deux à deux et le groupe W est isomorphe au produit direct $\prod_{i=1}^{k} W_i$. Pour tous éléments g et h de W, soient $g = g_1g_2\cdots g_k$ et $h = h_1h_2\cdots h_k$, avec g_i et h_i dans W_i. On a $g \wedge h = (g_1 \wedge h_1)(g_2 \wedge h_2)\cdots(g_k \wedge h_k)$ et $g \vee h = (g_1 \vee h_1)(g_2 \vee h_2)\cdots(g_k \vee h_k)$ et le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est isomorphe au produit direct $\prod_{i=1}^{k}(W_i, \preccurlyeq)$. ■

Le produit direct est un cas spécial de produit semi-direct. On a réglé le cas réductible et donc tous les autres cas considérés seront irréductibles.

2.3.2 Type I_m

Le graphe de Coxeter de type I_m, pour $m \geqslant 3$ est le suivant :



Le groupe de Coxeter associé W est un groupe diédral. On choisit, pour la construction de produit semi-direct $J = \{s_1\}$. L'ensemble W^J consiste en éléments $[s_2 s_1\rangle^k$, pour k entre 0 et $m-1$ (voir [23]). On rapelle que $\mathbf{k}$ déssigne la chaîne en k éléments.

Proposition 2.22 *Le treillis de l'ordre faible d'un groupe de Coxeter de type I_m, est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{2} \ltimes^{\varphi} \mathbf{m}$, où l'application φ est définie par $\varphi_{0_\mathbf{2},1_\mathbf{2}}(0_\mathbf{m}) = 0_\mathbf{m}$ et $\varphi_{0_\mathbf{2},1_\mathbf{2}}(h) = 1_\mathbf{m}$, pour $h \neq 0_\mathbf{m}$.*

DÉMONSTRATION : Comme précisé auparavant, on considère le sous-groupe $W_{\{s_1\}}$. On obtient, d'après l'algorithme 2.17, que l'ensemble T_{s_1} consiste en deux triplets spéciaux : à savoir $((1,1),(s_1,1),s_1)$ et $((1,[s_2s_1\rangle^{m-1}),(s_1,[s_2s_1\rangle^{m-1}),s_i)$, où i est 1, pour m impair, et 2 pour m pair. ■

On voit un exemple du treillis de l'ordre faible, pour $m = 6$, dans la figure 2.2.

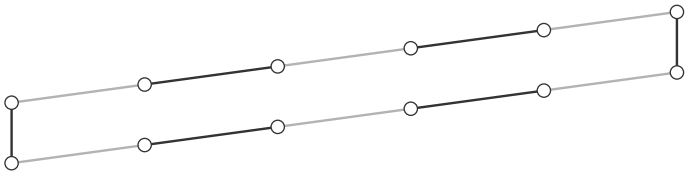
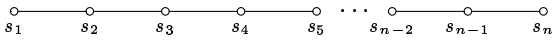


FIG. 2.2 – Le graphe de Cayley du groupe de Coxeter de type I_6 : les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2

2.3.3 Type A_n

Le graphe de Coxeter de type A_n, pour $n \geqslant 1$, est le suivant :



Le groupe associé est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n+1}$ (voir exemple 2.1). On choisit $J = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. L'ensemble W^J consiste en les éléments de la forme $s_n s_{n-1} \cdots s_i$, pour i entre 1 et n. En particulier, cet ensemble est une chaîne vis-à-vis à l'ordre $\preccurlyeq$ (voir [23]).

Proposition 2.23 *Soit W un groupe de Coxeter de type A_n, pour $n \geqslant 2$. Notons J l'ensemble $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Alors, le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, où l'ensemble T_{s_i} des triplets spéciaux pour φ_{1,s_i}, avec i entre 1 et $n-1$, consiste en (voir la figure 2.3) :*
- les triplets $((1,h),(s_i,h),s_i)$, pour $h \prec s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1}$,
- les triplets $((1,h),(s_i,h),s_{i+1})$, pour $s_n s_{n-1} \cdots s_i \preccurlyeq h$.

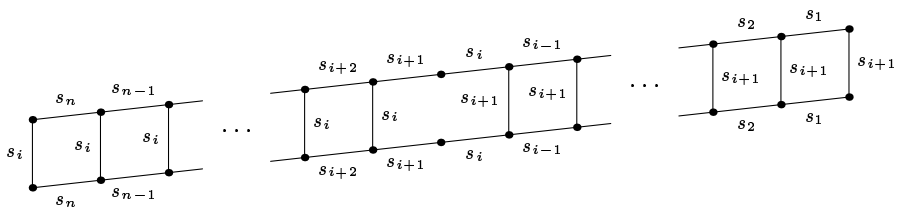


FIG. 2.3 – L'application φ_{1,s_i} du groupe de type A_n

DÉMONSTRATION : On construit l'ensemble T_{s_i}, pour chaque $i \leqslant n-1$, en utilisant l'algorithme 2.17. Le premier triplet dans T_{s_i} est le triplet $((1,1),(s_i,1),s_i)$. Ensuite, s_i commute avec tous les générateurs s_j, où j est entre n et $i+2$, et donc on trouve les triplets $((1,s_n\cdots s_j),(s_i,s_n\cdots s_j),s_i)$. Ensuite, on a la relation $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$ et on trouve $((1,s_n\cdots s_i),(s_i,s_n\cdots s_i),s_{i+1})$. Enfin, le générateur s_{i+1} commute avec tous les générateurs s_j, avec $j<i$ et on trouve les triplets $((1,s_n\cdots s_j),(1,s_n\cdots s_j),s_{i+1})$. On est arrivé à l'élément $s_n\cdots s_1$, l'élément maximal de W^J et cela finit la construction de l'ensemble T_{s_i}. On affirme dans le théorème 2.12 que le treillis $(W,\preccurlyeq)$ est le produit semi-direct. ■

On peut construire le treillis de l'ordre faible de W par récurrence. Le treillis du groupe de type A_1 est un treillis à deux éléments. Après, pour chaque groupe de type A_n avec $n \geqslant 2$, le sous-groupe parabolique engendré par l'ensemble $\{s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}\}$ est le groupe de type A_{n-1}. Par conséquent, le treillis du groupe de type A_n est un produit semi-direct du treillis du groupe de type A_{n-1} et de la chaîne à $n+1$ éléments. L'exemple, pour $n=3$, se trouve dans la figure 2.4.

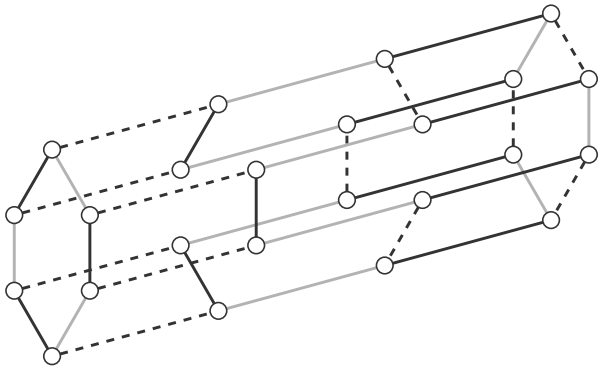
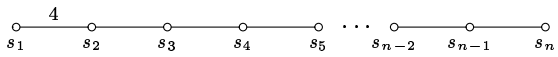


FIG. 2.4 – Le graphe de Cayley du groupe de Coxeter de type A_3 : les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2 et les pointillée représentent s_3

2.3.4 Type B_n

Le graphe de Coxeter de type B_n, pour $n \geqslant 2$, est le suivant :



Le groupe associé est le groupe de permutations signées sur $\{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$. Une *permutation signée* est une permutation π qui satisfait $\pi(-i) = -\pi(i)$ pour chaque i dans son domaine (voir [27]). Pour la décompostition, on choisit $J = \{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. On note b_i l'élément $s_n s_{n-1} \cdots s_i$, pour i entre 1 et n, et c_i l'élément $s_2 s_3 \cdots s_i$, pour i entre 2 et n. L'ensemble W^J est égal à $\{1\} \cup \{b_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_1 c_i;\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$, en particulier, il s'agit d'une chaîne (voir [23]).

Proposition 2.24 *Soit W un groupe de Coxeter de type B_n et notons J l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Alors le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, où l'application φ est décrite comme suit :*
L'ensemble T_{s_1} consiste en (voir la figure 2.5) :
- les triplets $((1,h),(s_1,h),s_1)$, pour $h \prec b_2$,
- les triplets $((1,h),(s_1,h),s_1)$, pour $b_2c_2 \preccurlyeq h$.
L'ensemble T_{s_i} avec i entre 2 et $n-1$ consiste en (voir la figure 2.6) :
- les triplets $((1,h),(s_i,h),s_i)$, pour $h \prec b_{i+1}$,
- les triplets $((1,h),(s_i,h),s_{i+1})$, pour $b_i \preccurlyeq h \prec b_2c_i$,
- les triplets $((1,h),(s_1,h),s_1)$, pour $b_2c_{i+1} \preccurlyeq h$.

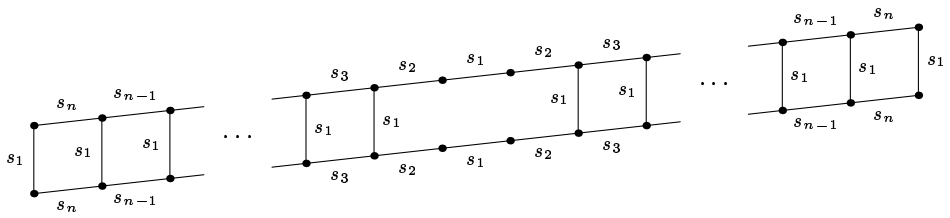


FIG. 2.5 – L'application φ_{1,s_1} du groupe de type B_n

DÉMONSTRATION : On construit l'ensemble T_{s_i} en utilisant l'algorithme 2.17. On commence par l'élément s_1, c'est-à-dire par $i = 1$: cet élément commute avec tous les générateurs s_j, pour j entre 3 et n, et donc les triplets $((1,b_j),(s_1,b_j),s_1)$ appartiennent à T_{s_1}. Ensuite on a $m_{s_1,s_2} = 4$, et on trouve le triplet $((1,b_1s_2),(s_1,b_1s_2),s_1)$. Maintenant l'élément s_1 commute de nouveau avec tous les générateurs s_j, pour j entre 3 et n, et les triplets $((1,b_1c_j),(s_1,b_1c_j),s_1)$ appartiennent à T_{s_1}.

Considérons maintenant l'élément s_i, avec $i > 1$. Cet élément commute avec tous les s_j, où j est entre $i+2$ et n. Donc les triplets $((1,b_j),(s_i,b_j),s_i)$ appartiennent à T_{s_i}. Maintenant on a $m_{s_i,s_{i+1}} = 3$ et on trouve le triplet $((1,b_i),(s_i,b_i),s_{i+1})$. L'élément s_{i+1} commute avec tous les s_j, pour $j < i$, et donc tous les triplets $((1,b_j),(s_i,b_j),s_{i+1})$ et

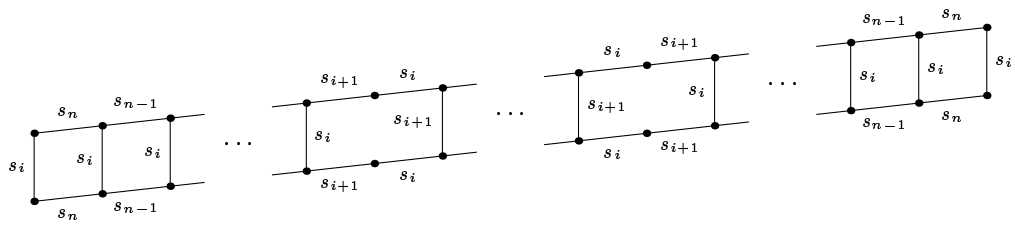


FIG. 2.6 – L'application φ_{1,s_i}, pour $i \geqslant 2$, du groupe de type B_n

$((1, b_1c_j), (s_i, b_1c_j), s_{i+1})$ appartiennent à T_{s_1}. Maintenant on a $m_{s_i,s_{i+1}} = 3$ de nouveau et on trouve le triplet $((1, b_1c_{i+1}), (s_i, b_1c_{i+1}), s_i)$. Enfin, l'élément s_i commute avec tous les s_j, pour $j > i + 1$ et on trouve les triplets $((1, b_1c_j), (s_i, b_1c_j), s_i)$. ■

Le treillis de l'ordre faible sur B_n est un produit semi-direct du treillis du groupe de type B_{n-1} et d'une chaîne à $2n$ éléments. Le graphe de Cayley de B_n peut être décrit comme suit : on prend le graphe de Cayley de B_{n-1} et on remplace chaque arête par le dessin correspondant des figures 2.5 et 2.6. Comme exemple, on présente dans la figure 2.7 le graphe de Cayley du groupe de type B_3.

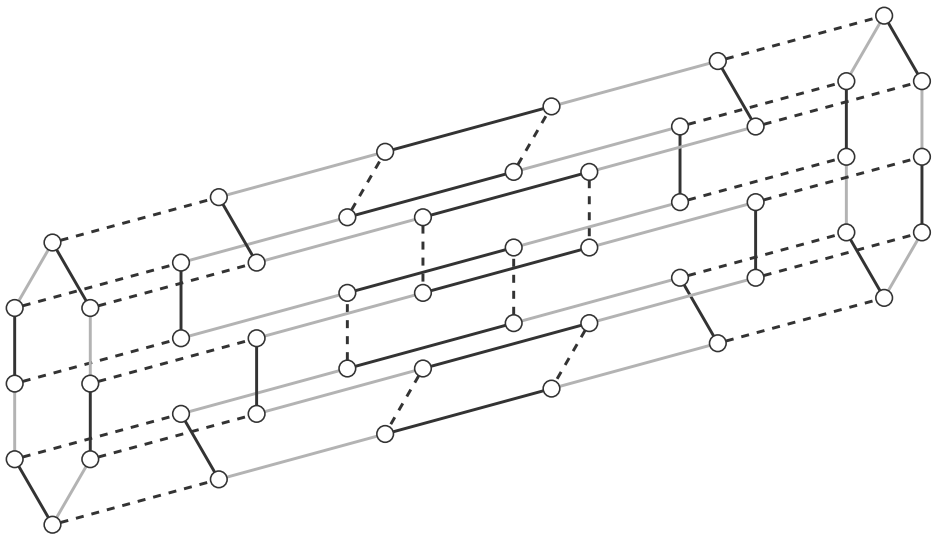
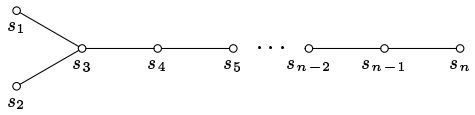


FIG. 2.7 – Le graphe de Cayley du groupe de type B_3 : les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2 et les pointillées représentent s_3

2.3.5 Type D_n

Le graphe de Coxeter de type D_n, pour $n \geqslant 3$ est le suivant :



Le groupe associé est un sous-groupe du groupe de type B_n. Ce sous-groupe est le groupe de permutations signées π sur $\{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$ qui satisfont $\pi(i) \neq -i$, pour chaque i entre $-n$ et n (voir [27]). D'habitude, on ne considère pas le groupe de type D_3 parce que le graphe de type D_3 est égal au graphe de type A_3. On considère ici D_3 quand même parce que c'est plus commode pour commencer notre approche inductive. Pour la construction du produit semi-direct, choisissons $J = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. On note b_i l'élément $s_n s_{n-1} \cdots s_i$ et c_i l'élément $s_3 s_4 \cdots s_i$. L'ensemble W^J est égal à

$$\{1\} \cup \{b_i;\ 3 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_3 s_j;\ j = 1, 2\} \cup \{b_1\} \cup \{b_1 c_i;\ 3 \leqslant i \leqslant n\}$$

(voir [23]). Cet ensemble n'est pas une chaîne, mais il en est proche et donc le produit semi-direct est facile à décrire.

Proposition 2.25 *Soit W un groupe de Coxeter de type D_n et notons J l'ensemble $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Alors le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, où l'application φ est décrite comme suit :*
L'ensemble T_{s_i}, pour $i = 1, 2$ consiste en (voir la figure 2.8) :
- les triplets $((1, h), (s_i, h), s_i)$, pour $h \prec b_3$,
- le triplet $((1, b_3 s_i), (s_i, b_3 s_i), s_3)$,
- les triplets $((1, h), (s_i, h), s_{3-i})$, pour $b_1 s_3 \preccurlyeq h$.
L'ensemble T_{s_i} avec i entre 3 et $n-1$ consiste en (voir la figure 2.9) :
- les triplets $((1, h), (s_i, h), s_i)$, pour $h \prec b_{i+1}$,
- les triplets $((1, h), (s_i, h), s_{i+1})$, pour $b_i \preccurlyeq h \prec b_1 c_i$,
- les triplets $((1, h), (s_1, h), s_1)$, pour $b_1 c_{i+1} \preccurlyeq h$.

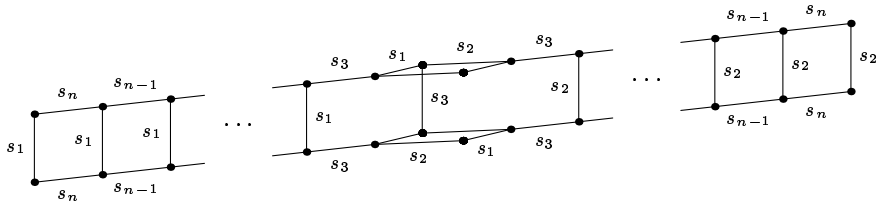


FIG. 2.8 – L'application φ_{1,s_1} pour le groupe de type D_n

DÉMONSTRATION : On utilise l'algorithme 2.17 pour trouver les ensembles T_{s_i} : On commence par $i = 1, 2$: le générateur s_i commute avec tous les générateurs s_j, avec $j \geqslant 4$. Donc les triplets $((1, b_j), (s_i, b_j), s_i)$ appartiennent à T_{s_i}. Ensuite, m_{s_3, s_i} est égal à 3 et

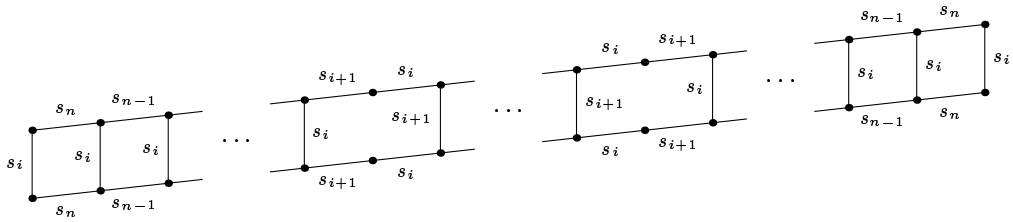


FIG. 2.9 – L'application φ_{1,s_i}, avec $i \geqslant 3$, pour le groupe de type D_n

on trouve le triplet $((1, b_3 s_i), (s_i, b_3 s_i), s_3)$. Maintenant on a $m_{s_3, s_{3-i}} = 3$ et on trouve le triplet $((1, b_3 s_i s_{3-i} s_3), (s_i, b_3 s_i s_{3-i} s_3), s_{3-i})$. Et ensuite, le générateur s_{3-i} commute avec tous s_j, pour $j \geqslant 4$ et les triplets $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_{3-j})$ appartiennent à T_{s_i}.

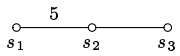
Considérons maintenant le générateur s_i, avec $i \geqslant 3$. Cet élément commute avec s_j, pour $j > i+1$, et donc les triplets $((1, b_j), (s_i, b_j), s_i)$ appartiennent à T_{s_i}. Ensuite on a $m_{s_i, s_{i+1}} = 3$ et on trouve le triplet $((1, b_i), (s_i, b_i), s_{i+1})$. Ensuite, le générateur s_{i+1} commute avec tous s_j, pour $j < i$ et on trouve les triplets $((1, b_j), (s_i, b_j), s_{i+1})$, avec $i > j \geqslant 3$, les triplets $((1, b_3 s_j), (s_i, b_3 s_j), s_{i+1})$, avec $j = 1, 2$, aussi $((1, b_1), (s_i, b_1), s_{i+1})$ et les triplets $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_{i+1})$, avec $3 \leqslant j < i$. Ensuite on a $m_{s_{i+1}, s_i} = 3$ et on trouve le triplet $((1, b_1 c_{i+1}), (s_i, b_1 c_{i+1}), s_i)$. Enfin, le générateur s_i commute avec tous s_j, pour $j > i+1$ et les triplets $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_i)$ appartiennent à T_{s_i}. ■

Le graphe de Cayley du groupe de Coxeter de type D_n peut être construit par induction à partir du groupe de type D_{n-1} et la classe à gauche associée. On débute l'induction avec une construction directe présentée dans la figure 2.10, où le sous-groupe engendré par s_1 et s_2 est le groupe non cyclique à quatre éléments.

2.3.6 Types exceptionnels

Il y a six autres types de groupes de Coxeter irréductibles, à savoir E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 et H_4 (voir [27]). Une construction par récurrence est aussi possible mais il est difficile de décrire les classes à gauche sous une forme simple, sauf pour le cas H_3.

Considérons le graphe de Coxeter de type H_3 :



On choisit $J = \{s_1, s_2\}$. L'ensemble W^J est l'ensemle des éléments plus petits que $s_3 s_2 s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$. Il ne s'agit pas d'une chaîne mais, comme dans le cas de type D_n, il en est proche.

Proposition 2.26 *Soit W un groupe de Coxeter de type H_3 et notons J l'ensemble $\{s_1, s_2\}$. Alors le treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, où l'application φ*

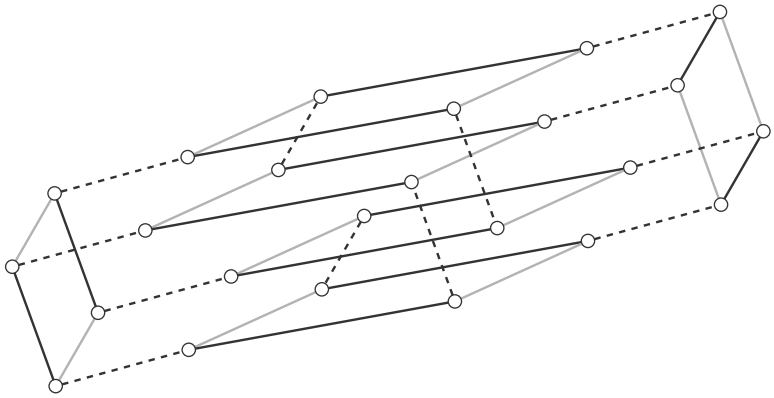


FIG. 2.10 – Le graphe de Cayley du groupe de type D_3 : les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2 et les pointillées représentent s_3

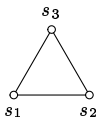
est décrit comme suit :
L'ensemble T_{s_1} *consiste en les triplets* $((1,1),(s_1,1),s_1)$, $((1,s_3),(s_1,s_3),s_1)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1),s_2)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1),s_3)$ *et* $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),s_2)$.
L'ensemble T_{s_2} *consiste en les triplets* $((1,1),(s_2,1),s_2)$, $((1,s_3s_2),(s_2,s_3s_2),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1),(s_2,s_3s_2s_1),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_3),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_3),s_2)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2),s_1)$ *et* $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),s_1)$.

DÉMONSTRATION : La démonstration est semblable à celle pour le type D_n.

Le sous-groupe parabolique W^J est le groupe de type I_5. Le graphe de Cayley du groupe W est présenté dans la figure 2.11.

2.3.7 Types infinis

L'ordre faible des groupes de Coxeter infinis peut également être détérminé comme produit semi-direct. Mais il existe à priori peu de tels groupes où on peut trouver une description simple de l'ensemble W^J. Ici, on considère seulement le type $\tilde{A}_2$. Son graphe de Coxeter est le suivant :



L'ordre faible ne forme pas un treillis, mais seulement un demi-treillis. On choisit $J =$

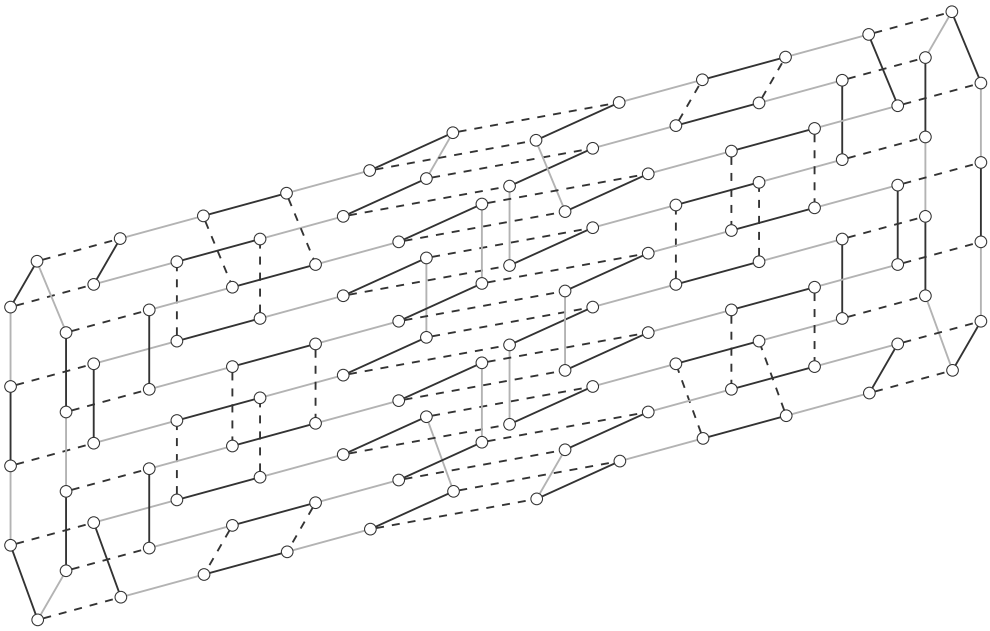


FIG. 2.11 – Le graphe de Caley du groupe de type H_3 : les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2 et les pointillées représentent s_3

$\{s_1, s_2\}$. L'ensemble W^J est :

$$W^J = \{\underbrace{s_3s_2s_1s_3s_2s_1\ldots}_{m};\ m \geqslant 1\} \cup \{\underbrace{s_3s_1s_2s_3s_1s_2\ldots}_{m};\ m \geqslant 1\} \cup \{g \in W;\ s_3s_1s_2s_1 \preccurlyeq g\}$$

(voir [23]).

Proposition 2.27 *Soit W un groupe de Coxeter de type $\tilde{A}_2$ et notons J l'ensemble $\{s_1, s_2\}$. Alors le demi-treillis $(W, \preccurlyeq)$ est le produit semi-direct $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, où l'application φ est décrite comme suit :*
L'ensemble T_{s_1} consiste en les triplets (voir la figure 2.12) :

$$((1, (s_3s_1s_2)^{2m}), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}), s_1),$$
$$((1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), s_3),$$
$$((1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), s_2),$$

avec $m \geqslant 0$. L'ensemble T_{1,s_2} consiste en les triplets

$$((1, (s_3s_2s_1)^{2m}), (s_2, (s_3s_2s_1)^{2m}), s_2),$$
$$((1, (s_3s_2s_1)^{2m}s_3s_2), (s_2, (s_3s_2s_1)^{2m}s_3s_2), s_3),$$
$$((1, (s_3s_2s_1)^{2m+1}s_3), (s_2, (s_3s_2s_1)^{2m+1}s_3), s_1).$$

avec $m \geqslant 0$.

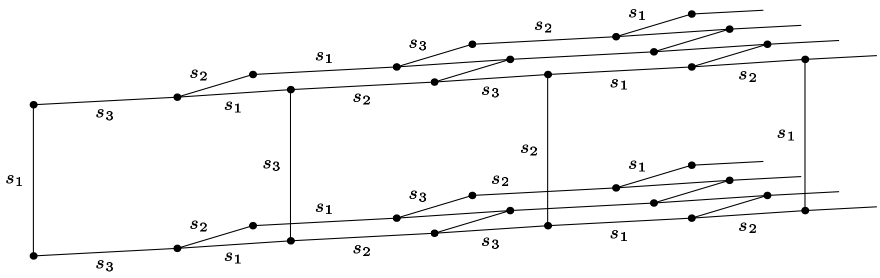


FIG. 2.12 – L'application ψ_{1,s_1} du groupe de type $\tilde{A}_2$. L'application ψ_{1,s_2} est semblable — il suffit d'échanger les arêtes s_1 et s_2.

DÉMONSTRATION : On énumère l'ensemble T_{s_1} en utilisant l'algorithme 2.17. On utilise induction sur m. Puisque s_1 est un générateur, l'élément $(s_1, 1)$ est un successeur immédiat de $(1, 1)$. Maintenant le seul générateur s dans S tel que $1s$ est J-réduit est l'élément s_3. On a $m_{s_1,s_3} = 3$ et, d'après le lemme 2.14, on déduit que $s_1s_3s_1$ est un successeur immédiat de s_3s_1. Il n'y a pas d'autre élément J-réduit de longueur 1 et donc on passe au triplet $((1, s_3s_1), (s_1, s_3s_1), s_3)$. L'élément $s_3s_1s_2$ est le seul successeur de s_3s_1 qui est J-réduit. On a $m_{s_2,s_3} = 3$ et cela implique que l'on a le triplet $((1, s_3s_1s_2s_3), (s_1, s_3s_1s_2s_3, s_2)$. Donc le résultat est vrai pour $m = 0$.

Maintenant supposons que le triplet $((1, (s_3s_1s_2)^{2m-1}s_3), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m-1}s_3), s_2)$ appartient à T_{s_1}. On ne peut continuer que par s_1. On a $m_{s_2,s_1} = 3$ et on trouve le triplet $((1, (s_3s_1s_2)^{2m}), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}), s_1)$. Le même argument que dans le cas $m = 0$ montre que le triplet $((1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), s_3)$ appartient à T_{s_1} et aussi le triplet $((1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), s_2)$. La démonstration pour l'ensemble T_{s_2} est semblable. ■

Le sous-groupe W_J est le groupe de type A_2. Par la proposition 2.19, quand on remplace chaque arête du graphe de type A_2 par le graphe de la figure 2.12, on obtient le graphe de type $\tilde{A}_2$ qui est montré dans la figure 2.13.

Exemple 2.28 On montre comment on peut construire, à partir de l'application ψ, l'inf de deux éléments du groupe de Coxeter W de type $\tilde{A}_2$. Considérons, par exemple, $g = s_1s_2s_3s_1s_2s_1s_3s_1$ et $g' = s_2s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_1$. On détermine l'inf de g et g' dans le groupe de type $\tilde{A}_2$ en utilisant la proposition 2.19. Par l'algorithme de [41], on trouve $\alpha_J(g) = s_1s_2$ et $\alpha_J(g') = s_2$. Ces éléments sont incomparables et donc on a $\psi_{s_1s_2,s_2} = \psi_{s_1s_2,1}$ et $\psi_{s_2,s_1s_2} = \psi_{s_2,1}$. On fait maintenant le calcul de $\psi_{s_1s_2,s_1}(s_3s_1s_2s_1s_3s_1)$ en utilisant (2.6). Il s'agit de trouver le plus grand élément h dans W^J satisfaisant $h \preccurlyeq s_3s_1s_2s_1s_3s_1$ et $((1,h),(s_2,h),t) \in T_{1,s_2}$, pour certain t dans $\{s_1, s_2, s_3\}$. Un tel élément doit être de la forme $(s_3s_2)^a(s_1s_3)^b(s_2s_1)^c$, avec $a \geqslant b \geqslant c \geqslant a-1$, et le plus grand, parmi de tels éléments, qui est toujours inférieur à $s_3s_1s_2s_1s_3s_1$, est l'élément s_3s_2. Donc on a $\psi_{s_1s_2,s_1}(s_3s_1s_2s_1s_3s_1) = s_3s_2$. Par analogie, on obtient $\psi_{s_1,1}(s_3s_2) = 1$ et donc, en

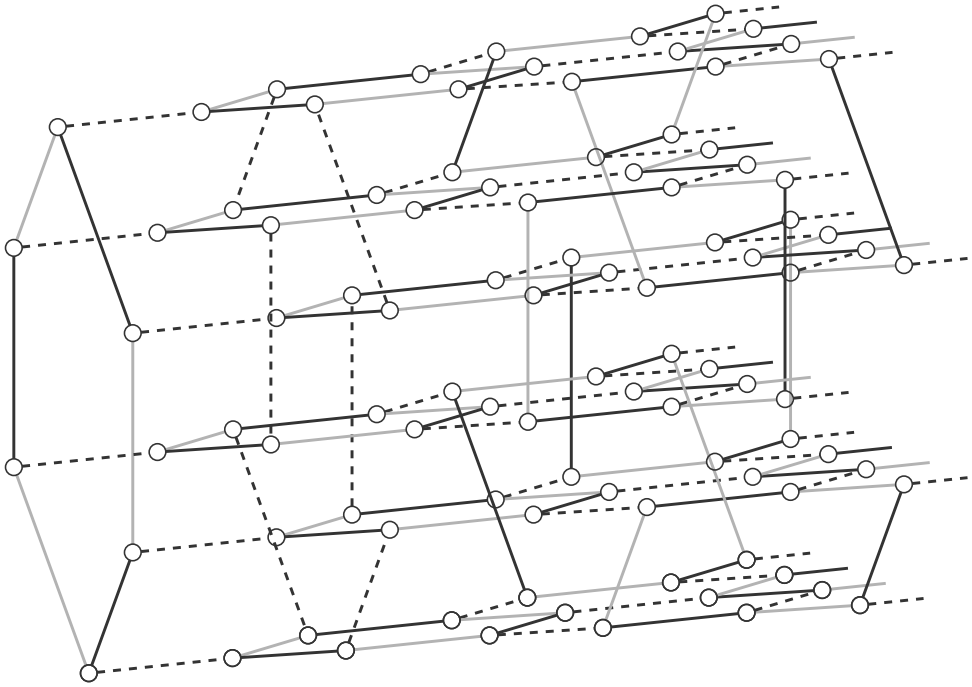


FIG. 2.13 – Le graphe de Cayley du groupe de type $\tilde{A}_2$: les arêtes noires représentent s_1, les grises représentent s_2 les pointillées représentent s_3

utilisant (2.5), on en déduit $\psi_{s_1 s_2,1}(s_3 s_1 s_2 s_1 s_3 s_1) = 1$. De la même façon on obtient $\psi_{s_2,1}(s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3 s_1) = s_3 s_2 s_1 s_3$. Enfin, la définition de l'application ψ donne

$$g \wedge g' = (s_1 s_2 \wedge s_2)(1 \wedge s_3 s_2 s_1 s_3) = 1.$$

Chapitre 3

Treillis de divisibilité

Les monoïdes d'Artin-Tits de type sphérique sont des extensions des groupes de Coxeter finis. L'ordre faible des groupes de Coxeter correspond, dans les monoïdes d'Artin-Tits, à l'ordre par divisibilité à gauche. On étudie, dans la section 1, les congruences dans les treillis de divisibilité à gauche des monoïdes d'Artin-Tits de type sphérique et on montre que ces treillis sont simples.

Les monoïdes de Garside sont une généralisation de la notion de monoïde d'Artin-Tits de type sphérique. Chaque monoïde de Garside possède un élément important, appelé l'élément de Garside minimal. Le graphe caractéristique d'un monoïde de Garside est le treillis des diviseurs de l'élément de Garside minimal. On étudie, dans la section 2, les graphes caractéristiques des monoïdes de Garside du point de vue des produits semi-direct de treillis.

3.1 Treillis de divisibilité dans les monoïdes d'Artin-Tits

On étudie dans cette section le treillis de divisibilité dans un monoïdes d'Artin-Tits. On étudie d'abord les idéaux engendrés par certains éléments canoniques et ensuite on montre que les treillis de divisibiltés dans les monoïdes d'Artin-Tits sont simples. Commençons par donner la définition d'un monoïde d'Artin-Tits.

Définition : Soit $\Gamma = (\Sigma, A)$ un graphe de Coxeter. Le *groupe d'Artin-Tits* associé à Γ est le groupe présenté par la présentation de groupe

$$\langle\, \Sigma;\ [\sigma,\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}} = [\tau,\sigma\rangle^{m_{\sigma,\tau}} \quad \text{pour } m_{\sigma,\tau} < \infty \,\rangle. \tag{3.1}$$

Le *monoïde d'Artin-Tits* associé Γ est le monoïde présenté par la présentation de monoïde (3.1). Un groupe ou un monoïde d'Artin-Tits est dit *de type sphérique* si le graphe de Coxeter associé définit un groupe de Coxeter fini. On dit qu'un groupe ou un monoïde d'Artin-Tits est *irréductible* si son graphe de Coxeter connexe.

Considérons le graphe de Coxeter de type A_n (voir l'exemple 2.1). Le groupe d'Artin-Tits associé est appelé le *groupe des tresses à $n+1$ brins*. Son interprétation géométrique est la suivante [12]. On part de $n+1$ brins parallèls. Les éléments du groupe de tresses sont les classes d'isotopie de diagrammes du type de la figure 3.1. La multiplication correspond à la concatenation des motifs.

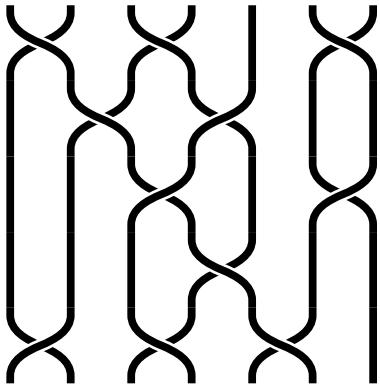


FIG. 3.1 – La tresse $\sigma_1\sigma_3\sigma_6\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_6^{-1}\sigma_4\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_5$

On note σ_i le croisement du i-ème brin au dessus du $(i+1)$-ème brin (voir la figure 3.2) et σ_i^{-1} le croisement du $(i+1)$-ème brin au dessus du i-ème brin. À isotopie près, ces tresses sont mutuellement inverses.

FIG. 3.2 – La tresse σ_4.

Il exite des relations canoniques, à savoir $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, pour $|i-j| \geqslant 2$, (voir la figure 3.3) et $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ (voir la figure 3.4).

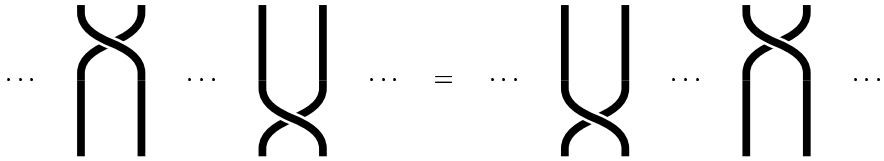


FIG. 3.3 – La relation $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ pour $|i-j| \geqslant 2$

On sait (voir [12]) que ces relation définissent le groupe de tresse et donc ce groupe est le groupe d'Artin-Tits de type A_n. Le monoïde de tresses positifs est le monoïde de tresse

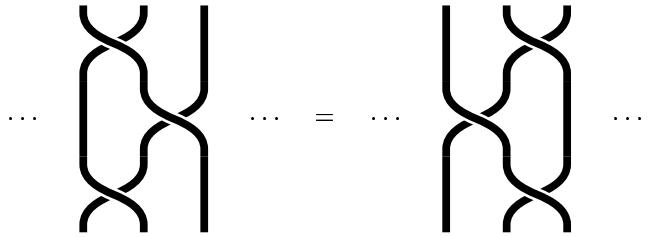


FIG. 3.4 – La relation $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

où aucun croisement de $i+1$-ème brin au dessus de i-ème brin n'apparaît. Ce monoïde est le monoïde d'Artin-Tits de type A_n.

Quand on quotiente un groupe ou un monoïde d'Artin-Tits par les relations $\sigma^2 = 1$, pour σ dans Σ, on obtient le groupe de Coxeter associé. Un groupe d'Artin-Tits est une extension sans torsion du groupe de Coxeter associé [11].

Définition : Soit M un monoïde. On dit qu'un élément a de M est un *atome* si la relation $a = bc$, pour b, c dans M, implique $b = 1$ ou $c = 1$ On dit que le monoïde M est *atomique* si la borne supérieure $\|a\|$ des longueurs des décompositions de l'élément a comme produit d'atomes est finie pour chaque a dans M. On appelle le nombre $\|a\|$ la *norme* de a.

Dans le cas d'un monoïde d'Artin-Tits, les générateurs σ de Σ sont des atomes et la longueur des décompositions d'un élément comme produit d'atomes est constante parce que les relations de la présentation (3.1) préservent la longueur. Donc chaque monoïde d'Artin-Tits est atomique, et la norme d'un élément est la longueur de n'importe quelle décomposition de cet élément.

Définition : Soit M un monoïde atomique et soient a, b, c dans M satisfaisants $a = bc$. Alors on dit que b est un *diviseur à gauche* de a, noté $b \preccurlyeq a$, que c est un *diviseur à droite* de a, que a est un *multiple à droite* de b et que a est un *multiple à gauche* de c.
On dit qu'un élément c est *le plus petit multiple commun à droite* de a et b, noté $c = a \vee b$ si c est un multiple à droite de a et de b et chaque autre multiple à droite de a et de b est un multiple à droite de c.
On dit qu'un élément c est *le plus grand diviseur commun à gauche* de a et b, noté $c = a \wedge b$ si c est un diviseur à gauche de a et de b et chaque autre diviseur à gauche de a et de b est un diviseur à gauche de c.

Proposition 3.2 [5] *Tout monoïde d'Artin-Tits de type sphérique M est atomique, simplifiable et tout couple d'éléments de M admet un plus petit multiple commun à gauche et un plus petit multiple commun à droite.*

La proposition 3.2 montre que l'ensemble M muni de l'ordre $\preccurlyeq$ est un treillis puisque pour chaque couple a, b dans M il existe une borne supérieure $a \vee b$ et une borne inférieure $a \wedge b$. On définit l'opération $\backslash$ de *résidu à gauche* par

$$a \vee b = a(a\backslash b) = b(b\backslash a) \tag{3.2}$$

Définition : Soit M un monoïde atomique. On dit qu'un élément δ de M est *équilibré* si l'ensemble des diviseurs à gauche de δ coïncide avec l'ensemble des diviseurs à droite de δ. Cet ensemble est noté $M(\delta)$.
Un élément δ de M est appelé *élément de Garside* s'il est équilibré et $M(\delta)$ engendre M. Un élément de Garside est appelé *l'élément de Garside minimal* de M s'il est le plus petit parmi tous les éléments de Garside de M, pour la divisibilité à gauche. Chaque diviseur à gauche de l'élément de Garside Δ est appelé un élément *simple*.

Proposition 3.3 [17] *Soit M un monoïde atomique. Si M possède un élément de Garside, alors il possède un élément de Garside minimal.*

Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique et notons W le groupe de Coxeter associé. Notons p la projection de M sur W. On montre facilement l'inégalité $\|a\| \geqslant \ell(p(a))$, pour chaque a dans M. D'après [5], on a l'égalité $\|a\| = \ell(p(a))$ si et seulement si a est simple. Alors l'application p est une bijection entre l'ensemble des éléments simples de M et l'ensemble W. De plus, il est facile de voir que cette bijection et compatible avec les ordre, à savoir avec l'ordre de la divisibilité à gauche sur les simples de M et avec l'ordre faible sur W. Par conséquent l'élément de Garside Δ du monoïde M est caractérisé par les propriétés $p(\Delta) = w_0$ et $\|\Delta\| = \ell(w_0)$. Une autre caractérisation de l'élément Δ est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3.4 [5] *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique et soit Δ l'élément de Garside minimal de M. Alors, pour chaque k dans $\mathbb{N}$, l'élément Δ^k est le plus petit multiple commun à gauche des éléments de norme égal à k.*

On va s'intéresser ici d'abord aux idéaux principaux de treillis de divisibilité qui sont engendrés par des éléments de Garside, c'est-à-dire aux treillis $(M(\delta), \preccurlyeq)$, où δ est un élément de Garside d'un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique. D'après [22], chaque élément de Garside dans M est une puissance de l'élément de Garside minimal Δ de M. On commence donc par le treillis de diviseurs de Δ.

Proposition 3.5 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit X un ensemble d'atomes de M et soit δ le ppcm à droite de X. Alors le treillis $(M(\Delta), \preccurlyeq)$ est un produit semi-direct du treillis $(M(\delta), \preccurlyeq)$ et du treillis $(\{d;\ d \wedge \delta = 1\}, \preccurlyeq)$.*

DÉMONSTRATION : On a dit auparavant que le treillis de diviseurs de Δ est isomorphe au treillis de l'ordre faible du groupe de Coxeter associé. La proposition résulte donc du théorème 2.12. ■

On commence maintenant à considérer les treillis $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$ pour $k > 1$. On en voit un exemple sur la figure 3.5. Pour les études de ces treillis, on a besoin d'un résultat général sur les treillis.

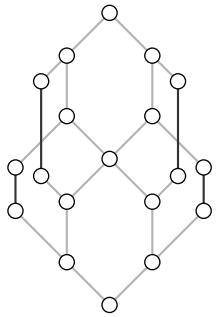


FIG. 3.5 – Le treillis $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$ dans le monoïde d'Artin de type A_2. Les sommets reliés par les arêtes noires représentent la plus grande congruence nontriviale (voir plus bas) sur le treillis $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$.

Définition [25] : Soit L un treillis et soient a, b, c, d dans L satisfaisant $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$. On écrit $[a, b] \nearrow [c, d]$ ou $[c, d] \searrow [a, b]$ si on a $b \vee c = d$ et $b \wedge c = a$. On note $\approx$ la plus petite équivalence des intervalles du treillis L qui contient les relations $\nearrow$ et $\searrow$.

Dans la théorie des treillis, on utilise d'habitude la notation b/a pour noter un intervalle $[a, b]$. On évite ici cette notation pour ne pas la confondre avec la notation d'un résidu à droite (analogue du résidu à gauche).

Lemme 3.6 [23] *Soit L un treillis et soit θ une congruence sur L. Soient a, b deux éléments avec $(a, b) \in \theta$.*
(i) Chaque élément de L entre les éléments $a \wedge b$ et $a \vee b$ est congru à a.
(ii) Si on a $a \leqslant b$, alors, pour chaque intervalle $[c, d]$ avec $[a, b] \approx [c, d]$, on a $(c, d) \in \theta$.

Dans le cas des treillis $(M(\Delta), \preccurlyeq)$, il existe une congruence associée à chaque partie d'atomes X, à savoir la congruence canonique du produit semi-direct. Dans cette congruence, chaque atome de X est congru à l'élément 1. Par contre, dans le cas de treillis $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$, avec $k > 1$ et M irréductible, seulement une congruence triviale peut réunir un atome de M avec l'élément 1 dans une classe d'équivalence :

Lemme 3.7 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique irréductible avec deux atomes σ_1, σ_2. Soit Δ l'élément $[\sigma_1, \sigma_2\rangle^{m_{\sigma_1,\sigma_2}}$. Soit θ une congruence sur $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$. Si un des atomes est θ-congru à 1, alors θ est triviale.*

DÉMONSTRATION : Supposons $(\sigma_1, 1) \in \theta$. On a $[1, \sigma_1] \nearrow [\sigma_2, \Delta] \searrow [1, \sigma_1\sigma_2]$, parce que le monoïde n'est pas commutatif. Ensuite on a $(\Delta, \sigma_2) \in \theta$ et $(\sigma_1\sigma_2, 1) \in \theta$. Maintenant on a

$[\sigma_1, \sigma_1\sigma_2] \nearrow [\sigma_1^2, \sigma_1\Delta] \searrow [\sigma_1, \Delta]$. On a donc $(\Delta, \sigma_1) \in \theta$ et aussi $(\sigma_1, \sigma_2) \in \theta$. Maintenant on trouve $[\sigma_1\sigma_2, \Delta] \nearrow [\sigma_1\sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2\Delta] \searrow [\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\Delta]$ et $(\sigma_1\Delta, \Delta) \in \theta$. De la même façon on trouve $(\sigma_2\Delta, \Delta) \in \theta$. Comme le ppcm de $\sigma_1\Delta$ et $\sigma_2\Delta$ est Δ^2, on a $(\Delta^2, \Delta) \in \theta$. On a vu aussi $(\Delta, 1) \in \theta$ et, d'après le lemme 3.6 (i), tout le treillis L appartient à une classe de congruence. ■

La proposition suivante donne des conditions plus strictes pour l'existence d'une congruence θ non triviale. La condition (3.3) exige que deux éléments équivalents ont les mêmes diviseurs jusqu'à la norme k et la condition (3.4) est la condition duale.

Proposition 3.8 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique irréductible qui a au moins deux atomes. Notons Δ son élément de Garside minimal et notons L le treillis de la divisibilité à gauche des diviseurs de Δ^k, pour $k > 1$. Soit θ une congruence non triviale sur L. Si deux éléments a, b de L sont θ-équivalents, alors les deux conditions suivantes sont remplies :*

$$\{c \in L;\ c \preccurlyeq a \text{ et } \|c\| \leqslant k\} = \{c \in L;\ c \preccurlyeq b \text{ et } \|c\| \leqslant k\}, \tag{3.3}$$

$$\{c \in L;\ a \preccurlyeq c \text{ et } \|c \backslash \Delta^k\| \leqslant k\} = \{c \in L;\ b \preccurlyeq c \text{ et } \|c \backslash \Delta^k\| \leqslant k\}. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION : Soit θ une congruence non triviale et soient a, b deux éléments de L qui sont θ-équivalents. Supposons $a \leqslant b$, sans perte de généralité. On étudie d'abord le cas $a = 1$. Il existe un atome σ de M vérifiant $\sigma \preccurlyeq a$. Puisque le monoïde M est irréductible et il possède au moin deux atomes, il existe un atome τ de M qui ne commute pas avec σ. Maintenant, d'après le lemme 3.7, on a $(\tau, 1) \in \theta$. On continue par induction : supposons que tous les atomes d'un sous-ensemble Σ' de l'ensemble Σ sont congrus à 1. Si l'ensemble $\Sigma \setminus \Sigma'$ n'est pas vide, alors, par irréducibilité, il existe un couple d'atomes σ' de Σ' et τ' de $\Sigma \setminus \Sigma'$ qui ne commute pas. D'après le lemme 3.7 on a $(\tau', 1) \in \theta$. On obtient à la fin d'induction que chaque atome de Σ est congru à 1. Puisque l'élément Δ est le ppcm des atomes, on obtient aussi $(\Delta, 1) \in \theta$.

Maintenant on montre par induction que Δ^l est congru à 1, pour chaque $l \leqslant k$. Le fait est vrai pour $l = 1$. Supposons $l > 1$. Pour chaque couple d'atomes σ', σ'' qui ne commutent pas, on a $[\Delta^{l-2}\sigma'\sigma'', \Delta^{l-1}] \nearrow [\Delta^{l-2}\sigma'(\sigma'')^2, \Delta^{l-2}\sigma'\sigma''\Delta] \searrow [\Delta^{l-1}\sigma'\sigma'', \sigma'\Delta^{l-1}]$ et cela implique $(\sigma'\Delta^{l-1}, 1) \in \theta$. Puisque le ppcm de $\sigma'\Delta^{l-1}$, pour tous les σ' dans Σ est l'élément Δ^l, on a $(\Delta^l, 1) \in \theta$. Le résultat est vrai pour $l = k$ et la congruence θ est triviale, ce qui contredit l'hypothèse de la proposition.

Supposons maintenant $1 \leqslant \|a\| < k$. Il existe un atome σ verifiant $(a, a\sigma) \in \theta$. Il existe aussi un atome τ verifiant $a = a'\tau$. Puisque la norme de a est strictement inférieure à k, l'élément $a\Delta$ est un diviseur à gauche de Δ^k. On a maintenant $[a, a\sigma] \nearrow [a\tau, a[\sigma\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}}] \searrow [a, a[\sigma\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}-1}] \searrow [a', a'\sigma]$. On a donc $(a', a'\sigma) \in \theta$. On a trouvé un couple d'éléments θ-équivalents avec $\|a'\| < \|a\|$. On continue à trouver par induction des éléments plus en plus petits jusqu'au moment où on obtient une paire $(1, e) \in \theta$. Mais cela entraîne $\theta = L \times L$ est c'est une contradiction parce que θ est considérée être non triviale.

Supposons maintenant deux éléments a, b qui ne satisfont pas la condition (3.3). Soit c un diviseur de b, satisfaisant $\|c\| \leqslant k$, qui ne divise pas a. Alors on a $a \preccurlyeq a \vee c \preccurlyeq a \vee b$ et $(a, a \vee c) \in \theta$. Ensuite on trouve $[a, a \vee c] \searrow [a \wedge c, c]$ et $(a \wedge c, c) \in \theta$. On a

nécessairement $\|a \wedge c\| < k$ et, d'après le paragraphe précédent, on a $\theta = L \times L$, ce qui contredit l'hypothèse de la proposition. Alors chaque couple θ-équivalente doit satisfaire la condition (3.3). L'application $a \mapsto a\backslash\Delta$ est un antiautomorphisme du treillis L, et donc la condition (3.4) résulte par dualité de la condition (3.3). ■

Corollaire 3.9 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique, soit Δ son élément de Garside minimal et soit $k > 1$. Alors le treillis $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$ possède une congruence maximale.*

DÉMONSTRATION : Deux congruences non triviales doivent satisfaire les conditions (3.4) et (3.3). Leur sup doit aussi satisfaire ces conditions. ■

Les conditions (3.3) et (3.4) ne sont pas suffisantes en général. Soit ρ la relation tel que (a, b) est dans ρ si et seulement si a et b satisfont (3.3) et (3.4). Dans le cas représenté dans la figure 3.5, la relation ρ est une congruence et donc elle est la congruence maximale. Mais soit M, le monoïde d'Artin de type I_6. Considérons le treillis $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$. Les éléments $a = \sigma_1\sigma_2^2$ et $b = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2$ satisfont les conditions (3.3) et (3.4). Mais on a $\sigma_1\sigma_2^2 \wedge \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2 = \sigma_1\sigma_2$ et cet élément est, contrairement à a et b, un diviseur à gauche de l'élément $\sigma_1\backslash\Delta^2$, ce qui montre que ρ n'est pas une congruence sur M.

Question 3.10 Quelles sont des conditions suffisantes pour qu'un couple d'éléments appartienne à la congruence maximale sur le treillis $(M(\delta^k), \preccurlyeq)$?

Il y a un autre résultat qui est une conséquence de la proposition 3.8, la simplicité du treillis entier $(M, \preccurlyeq)$.

Proposition 3.11 *Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique, irréductible, avec au moins deux atomes. Alors le treillis $(M, \preccurlyeq)$ est simple.*

DÉMONSTRATION : Soit θ une congruence sur M et soient a, b dans M différents et θ-congrus. Soit k un nombre verifiant $k > \max\{\|a\|, \|b\|\}$. Alors, d'après la proposition 3.8, la congruence θ restreinte à M_{Δ^k} est triviale et on a $(\Delta^k, 1) \in \theta$. Ceci est vrai pour n'importe quel k assez grand, et donc la congruence θ est triviale. ■

3.2 Produits semi-directs dans les monoïdes de Garside

Les monoïdes de Garside sont une généralisation des monoïdes d'Artin-Tits de type sphérique. Chaque monoïde de Garside M contient un élément de Garside Δ. Dans cette section on étudie le treillis de diviseurs de Δ dans M On trouve des conditions sous lesquelles ces treillis mettent un jeu la construction de produit semi-direct.

Définition [17] : Un monoïde M est appelé *monoïde de Garside* s'il satisfait les quatre conditions suivantes :
(i) Le monoïde M est atomique avec un nombre fini d'atomes.
(ii) Le monoïde M est simplifiable.

(*iii*) Chaque paire d'éléments de M admet un ppcm à droite et à gauche.
(*iv*) Il existe un élément de Garside dans M.

Il est connu (voir [17]) que l'ordre associé à la divisibilité à gauche dans un monoïde de Garside forme un treillis.

Définition : Soit Δ l'élément de Garside minimal d'un monoïde de Garside M. Un *graphe caractéristique* de M est le sous-graphe du graphe de Cayley du monoïde M restreint aux éléments simples.

Exemple 3.12 Chaque monoïde d'Artin-Tits de type sphérique est un monoïde de Garside. Son graphe caractéristique est égal au graphe de Cayley du groupe de Coxeter associé.

Le graphe caractéristique est important parce qu'il détermine le monoïde de Garside complètement (voir [14]). Dans le cas des monoïdes d'Artin de type sphérique, les graphes caractéristiques peuvent être obtenus par une construction récursive en utilisant le produit semi-direct de treillis. On va étudier ici d'autres graphes caractéristiques qui admettent une décomposition en tant que produit semi-direct. Il n'est pas vrai que chaque graphe caractéristique admet une telle décomposition : par exemple le graphe de la figure 3.6 est simple et donc ne peut être décomposé.

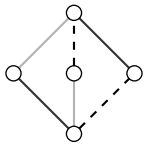


FIG. 3.6 – Le graphe caractéristique du monoïde B_3^{BKL+} de Birman, Ko et Lee [2], donné par la présentation $\langle a, b, c;\ ab = bc = ca\rangle$. L'élément de Garside minimal est l'élément ab. Les arêtes noires représentent a, les grises représentent b et les pointillées représentent c.

Comme dans le cas des groupes de Coxeter, on définit ici la notion de sous-structure parabolique.

Définition [24] : Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit δ un élément équilibré simple de M. Notons M_δ le monoïde engendré par l'ensemble de diviseur de δ, noté $M(\delta)$. Si on a $M(\delta) = M(\Delta) \cap M_\delta$, alors le monoïde M_δ est appelé *sous-monoïde parabolique* de M.

Proposition 3.13 [24] *Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit δ un élément équilibré simple de M. Si M_δ est un sous-monoïde parabolique de M, alors M_δ est monoïde de Garside et δ est son élément de Garside.*

On définit aussi l'ensemble des éléments δ-réduits et on montre que chaque élément simple a une décomposition unique en tant que produit d'un diviseur de δ et d'un élément δ-réduit.

Définition : Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. On dit qu'un élément a de $M(\Delta)$ est *δ-réduit* si on a $a \wedge \delta = 1$. L'ensemble de tous les éléments δ-réduits est noté M^δ. On note d_δ le plus grand élément de M^δ si un tel élément existe.

Lemme 3.14 *Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. Alors chaque élément a de $M(\Delta)$ s'écrit uniquement comme produit d'un élément de $M(\delta)$ et d'un élément de M^δ.*

DÉMONSTRATION : On a la décomposition $a = (a \wedge \delta)((a \wedge \delta)\backslash a)$. On veut montrer qu'il s'agit d'une décomposition du type voulu et qu'elle est unique. Soit b l'élément $\delta \wedge ((a \wedge \delta)\backslash a)$. L'élément $(a \wedge \delta)b$ est un élément de M_δ qui est simple dans M. Donc, par définition d'un sous-monoïde parabolique, il est un diviseur à gauche de l'élément δ. Cet élément est aussi un diviseur à gauche de a et donc on a $(a \wedge \delta)b \preccurlyeq a \wedge \delta$, ce qui entraîne $b = 1$. Par conséquent, l'élément $(a \wedge \delta)\backslash a$ est δ-réduit. Considérons maintenant une décomposition $a = a'a''$ avec a' dans $M(\delta)$ et a'' dans M^δ. Puisque a' est un diviseur à gauche à la fois de l'élément a et de l'élément δ, on a $a' \preccurlyeq (a \wedge \delta)$. Notons c l'élément $a'\backslash(a \wedge \delta)$. L'élément a'', qui est égal à $c(a \wedge \delta)\backslash a$, est δ-réduit et donc on a $a'' \wedge \delta = 1$. Mais on a $c \preccurlyeq (c(a \wedge \delta)\backslash a) \wedge \delta$ et cela entraîne $c = 1$. Par conséquent, la décomposition $a = (a \wedge \delta)((a \wedge \delta)\backslash a)$ est unique. ■

Définition : Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. On définit les applications α_δ de $M(\Delta)$ vers $M(\delta)$ et ω_δ de $M(\Delta)$ vers M^δ comme $\alpha_\delta(a) = a \wedge \delta$ et $\omega_\delta(a) = (a \wedge \delta)\backslash a$ pour chaque a de $M(\Delta)$.

Exemple 3.15 Soit M un monoïde d'Artin-Tits de type sphérique, soit Δ son élément de Garside minimal. Soit X un sous-ensemble de l'ensemble des atomes de M et δ le ppcm à gauche de X. Alors M_δ est un sous-monoïde parabolique de M. Le treillis de divisibilité de $M(\Delta)$ correspond au treillis de l'ordre faible du groupe de Coxeter associé à M. La décomposition $a = \alpha_\delta(a)\omega_\delta(a)$ correspond à la décomposition $g = \alpha_J(g)\omega_J(g)$, où g et l'image de a et J est l'image de X par la projection canonique.

Le lemme 3.14 donne une décomposition de chaque élément simple. Mais cette décomposition ne donne pas une bijection en général : on n'est pas sûr en général que le produit d'un élément de $M(\delta)$ et d'un élément de M^δ est simple. Par exemple, dans le monoïde représenté dans la figure 3.6, le sous-monoïde engendré par a est un sous-monoïde parabolique. L'élément c est a-réduit mais l'élément ac n'est pas un élément simple.

On présente maintenant une condition suffisante pour que les applications α_δ et ω_δ donnent une bijection entre $M(\Delta)$ et $M(\delta) \times M^\delta$. Dans ce cas, la décomposition met en

jeu un produit semi-direct. On rapelle que d_δ est le plus grand élément de M^δ si un tel élément existe.

Proposition 3.16 *Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. Alors l'application $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ est une bijection de l'ensemble $M(\Delta)$ sur l'ensemble $M(\delta) \times M^\delta$ si et seulement si l'élément d_δ existe et on a $\Delta = \delta d_\delta$. De plus, si cette condition est satisfaite, alors l'application α_δ est un épimorphisme de treillis de $M(\Delta)$ sur M_δ.*

DÉMONSTRATION : Supposons d'abord que $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ est une bijection. Alors l'application ω_δ est une bijection entre l'intervalle $[\delta, \Delta]$ et l'ensemble M^δ. De plus, l'application ω_δ restreinte à cet intervalle est compatible avec l'ordre : la relation $\delta b \preccurlyeq \delta c$ est équivalente à la relation $b \preccurlyeq c$, à cause de la simplifiabilité. L'élément Δ est le plus grand élément de l'intervalle $[\delta, \Delta]$ donc il s'envoie sur le plus grand élément de M^δ et on a $\Delta = \delta d_\delta$.

Supposons maintenant que l'élément d_δ existe et que l'on a $\Delta = \delta d_\delta$. Alors chaque élément de la forme ad_δ avec a dans $M(\delta)$ est un diviseur à droite de Δ et donc aussi un diviseur à gauche de l'élément Δ. Chaque élément de forme ab avec a dans $M(\delta)$ et b dans M^δ est un diviseur à gauche de ad_δ et donc aussi un diviseur à gauche de l'élément de Garside Δ. Par conséquent, l'application $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ est surjective. L'injectivité de cette application est montrée dans le lemme 3.14.

Montrons maintenant que l'application α_δ est un épimorphisme de treillis. La surjectivité est évidente, la compatibilité avec l'inf est immédiate : on a $\alpha_\delta(a \wedge b) = (a \wedge b \wedge \delta) = (a \wedge \delta) \wedge (b \wedge \delta) = \alpha_\delta(a) \wedge \alpha_\delta(b)$. Donc il suffit de montrer la compatibilité avec le sup.

On montre d'abord $d_\delta \preccurlyeq bd_\delta$ pour chaque b dans $M(\delta)$. Soit c l'élément satisfaisant $cb = \delta$. L'élément cd_δ est un produit d'un élément de $M(\delta)$ et d'un élément de M^δ et donc il est un diviseur à gauche de Δ. On a $cd_\delta((cd_\delta)\backslash\Delta) = \Delta = cbd_\delta$ et on peut simplifier l'élément c. On obtient $d_\delta((cd_\delta)\backslash\Delta) = bd_\delta$ et l'élément d_δ est un diviseur à gauche de l'élément bd_δ.

Montrons ensuite que la relation $b \preccurlyeq b'$ est équivalente à la relation $bd_\delta \preccurlyeq b'd_\delta$. Supposons $b \preccurlyeq b'$. Soit b'' l'élément satisfaisant $bb'' = b'$. On a montré que l'élément d_δ est un diviseur à gauche de l'élément $b''d_\delta$ et donc il existe un élément c satisfaisant $b''d_\delta = d_\delta c$. Maintenant on a $b'd_\delta = bb''d_\delta = bd_\delta c$ et donc bd_δ est un diviseur à gauche de $b'd_\delta$. Supposons maintenant $bd_\delta \preccurlyeq b'd_\delta$. On applique l'opération inf avec δ à cette inégalité et on obtient $b \preccurlyeq b'$.

On montre enfin que α_δ est compatible avec le sup. Pour tous a, b dans $M(\Delta)$, on a $a = \alpha_\delta(a)\omega_\delta(a) \preccurlyeq \alpha_\delta(a)d_\delta \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$. De même on a $b \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$ et cela donne $a \vee b \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$. On applique l'opération inf avec δ à cette inégalité pour obtenir $\alpha(a \vee b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b)$. De l'autre coté, considérons la loi d'idempotence $a \wedge (a \vee b) = a$. Prenons l'inf de cette égalité avec l'élément δ pour obtenir $\alpha_\delta(a) \wedge \alpha_\delta(a \vee b) = \alpha_\delta(a)$. Alors on $\alpha_\delta(a) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$ et de même on a $\alpha_\delta(b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$. Donc on a $\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$ et cela donne $\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b) = \alpha_\delta(a \vee b)$. Par conséquent, l'application α_δ est compatible avec le sup et il s'agit d'un homomorphisme. ■

Question 3.17 Est-ce qu'il existe un monoïde de Garside M avec l'élément de Garside minimal Δ et M_δ un sous-monoïde parabolique de M tels que d_δ existe mais on n'a pas $\delta d_\delta = \Delta$?

Théorème 3.18 *Soit M un monoïde de Garside et soit Δ son élément de Garside minimal. Soit M_δ un sous-monoïde parabolique de M. Supposons que l'élément d_δ existe et que l'on a $\Delta = \delta d_\delta$. Alors, l'ensemble M^δ est un treillis et le treillis $M(\Delta)$ est isomorphe à un produit semi-direct de $M(\delta)$ et M^δ.*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 3.16, l'application α_δ est un homomorphisme de treillis et chaque classe d'équivalence associée à l'homomorphisme α_δ est en bijection avec l'ensemble M^δ. En particulier, l'ensemble M^δ forme une classe d'équivalence et donc M^δ est un sous-treillis. Notons $\eta_{a,b}$ l'application $c \mapsto b\omega_\delta(c)$ de l'ensemble aM^δ vers bM^δ, pour tous a et b dans $M(\Delta)$. L'application $\eta_{a,b}$ est une bijection entre les ensembles aM^δ et bM^δ. De plus, l'application $\eta_{a,b}$ préserve l'ordre : la relation $ac \preccurlyeq ac'$ est équivalente à $c \preccurlyeq c'$ et c'est équivalent à $bc \preccurlyeq bc'$ pour tous c, c' dans M^δ. Alors $\eta_{a,b}$ est un isomorphisme de treillis et la proposition 1.9 montre que $M(\Delta)$ est un produit semi-direct des treillis $M(\delta)$ et M^δ. ■

On voit que les classes d'équivalence de l'application α_δ sont isomorphes non seulement comme treillis mais aussi comme sous-graphes du graphe de Cayley : quand on a une arête d'un élément ab à un élément abx, pour a dans $M(\delta)$, b dans M^δ et x un atome, alors cette arête est étiquetée par l'atome x. De même, l'arête de $a'b$ à $a'bx$ est étiquetée par l'atome x pour chaque a' dans $M(\delta)$.

Tout monoïde d'Artin-Tits de type sphérique est un exemple de monoïde de Garside satisfaisant les conditions du théorème 3.18. Dans ce cas, le treillis de la divisibilité des éléments simples est isomorphe au treillis de l'ordre faible dans le groupe de Coxeter associé et on connaît déjà la décomposition de ce treillis. Il existe d'autres exemples de monoïdes Garside auquels le théorème 3.18 s'applique.

Exemple 3.19 Considérons le monoïde M donné par la présentation $\langle x, y;\ xyx = y^2\rangle$. Ce monoïde est un monoïde de Garside et son élément de Garside est y^3 (voir [14]). Les éléments simples sont 1, x, y, xy, y^2, yx, yxy et y^3. Le sous-monoïde engendré par l'élément x est un sous-monoïde parabolique de M et les éléments x-réduits sont 1, y, yx et yxy. Puisque l'élément $x \cdot yxy$ est l'élément de Garside de M, le graphe caractéristique est un produit semi-direct des treillis $M(x)$ et M^x (voir la figure 3.7). Remarquons aussi que le sous-monoïde engendré par y n'est pas parabolique et donc on ne peut pas trouver une structure de produit semi-direct associé à l'élément équilibré y.

M. Picantin a considéré dans sa thèse [42] une notion de produit croisé de monoïdes de Garside qui permet de construire certains monoïdes de Garside à partir de monoïdes de Garside plus petits. On montre ici que les graphes caractéristiques des monoïdes obtenus par cette construction sont des produits semi-directs.

Définition [42] : Supposons que $M_1, \ldots, M_n$ sont des monoïdes de Garside. Soit i l'ensemble des atomes de M_i pour i entre 1 et n. Une *famille des fonctions vérifiant les*

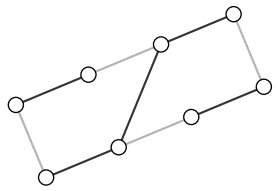


FIG. 3.7 – Le graphe caractéristique du monoïde $\langle x, y;\ xyx = y^2\rangle$. Les arêtes grises représentent x et les noires représentent y.

identités de résidu est définie comme une famille $\vec{\Theta}$ de fonctions $\Theta_{ij} : M_i \times M_j \to M_j$ pour $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ telles que, pour tout a dans M_i, la restriction $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ de Θ_{ij} à $\{a\} \times M_j$ soit une bijection de M_j, et vérifie

$$\Theta_{ij}(ab, c) = \Theta_{ij}(b, \Theta_{ij}(a, c)), \tag{3.5}$$

$$\Theta_{ij}(a, cd) = \Theta_{ij}(a, c)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(c, a), d), \tag{3.6}$$

$$\Theta_{jk}(\Theta_{ij}(a, c), \Theta_{ik}(a, e)) = \Theta_{ik}(\Theta_{ji}(c, a), \Theta_{jk}(c, e)), \tag{3.7}$$

pour a, b dans M_i, c, d dans M_j, e dans M_k avec $1 \leqslant i \neq j \neq k \neq i \leqslant n$. Le *produit croisé* $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ est défini comme le quotient du produit libre des M_i par la congruence engendrée par tous les couples $(x\Theta_{ij}(x, y), y\Theta_{ji}(y, x))$ avec x dans A_i, y dans A_j et $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Pour $n = 2$ on note le produit croisé $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$.

On voit que la définition du produit croisé ne dépend pas de l'ordre des monoïdes $M_1, \ldots, M_n$. Les deux résultats suivants sont établies dans [42].

Lemme 3.20 [42] *Supposons que $M_1, \ldots, M_n$ sont des monoïdes de Garside. Soit $\vec{\Theta}$ une famille des fonctions vérifiant les identités de résidu. Alors :*
(i) On a $\|\Theta_{ij}(a, b)\| = \|b\|$ pour tous i, j entre 1 et n et tous a de M_i et b de M_j.
(ii) Pour chaque i entre 1 et n, l'application $a \mapsto a$ est un plongement de M_i dans $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$.
(iii) L'application $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n$ est une bijection entre les ensembles $M_1 \times M_n$ et $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$.

Proposition 3.21 [42] *Supposons que $M_1, \ldots, M_n$ sont des monoïdes de Garside. Alors, pour chaque famille $\vec{\Theta}$ des fonctions vérifiant les identités de résidu, le monoïde $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ est un monoïde de Garside. Les éléments simples de $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ sont des produits d'éléments simples de $M_1, \ldots, M_n$ et le treillis des éléments simples de $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ est isomorphe au produit direct des treillis des éléments simples de $M_1, \ldots, M_n$.*

Considérons le cas du produit croisé de deux monoïdes. La proposition 3.21 dit que le treillis des simples de $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$ est isomorphe au produit direct des treillis des simples de M_1 et de M_2. En général, ce treillis ne pas égal au produit direct des treillis de simples de M_1 et de M_2, c'est-à-dire, il n'est pas vraie que tout élément simple de $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$ qui

sécrit ab avec a simple dans M_1 et b simple dans M_2 satisfait $ab = ba$. C'est pourquoi on considère la construction de produit semi-direct ici : le graphe qui est obtenu à partir du diagramme de Hasse du produit semi-direct des simples de M_1 et de M_2 en étiquetant les arêtes par des générateurs est le graphe caractéristique du monoïde $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$.

Proposition 3.22 *Supposons que M_1, M_2 sont des monoïdes de Garside. Soit $\vec{\Theta}$ une famille des fonctions vérifiant les identités de résidu. Notons Δ_i l'élément de Garside minimal du monoïde M_i, pour $i = 1, 2$, et notons M le monoïde $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$. Alors le treillis des éléments simples du monoïde $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$ est égal au produit semi-direct $M(\Delta_1) \ltimes^{\varphi} M(\Delta_2)$, où l'application φ est définie comme $\varphi_{a,ax}(b) = \Theta_{12}(x, b)$, pour chaque a dans $M(\Delta_1)$, chaque b dans $M(\Delta_2)$ et chaque x atome de M_1. En particulier, l'arête de ab vers $ax\Theta_{12}(x, b)$ dans le graphe caractéristique est étiquetée par l'atome $\Theta_{21}(b, x)$.*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 3.21, l'élément de Garside de M est l'élément $\Delta_1\Delta_2$. D'après le lemme 3.20, les éléments du monoïde M_1 ne s'écrivent jamais comme des produits d'éléments de M_1 et de M_2. Alors, chaque élément de M_1 qui est simple dans M est aussi simple dans M_1 et le sous-monoïde M_1 est parabolique dans M. Puisque le treillis des diviseurs de $\Delta_1\Delta_2$ est le produit des treillis des simples dans M_1 et dans M_2, chaque élément simple a, avec $a \wedge \Delta_1 = 1$, est un diviseur de l'élément Δ_2. Donc l'élément Δ_2 est le plus grand élément de l'ensemble M^{Δ_1} et toutes les conditions du théorème 3.18 sont satisfaites. Par conséquent, le treillis des simples de M est un produit semi-direct $M(\Delta_1) \ltimes^{\varphi} M(\Delta_2)$. Par définition du produit croisé, on a la relation $ax\Theta_{12}(x, b) = ab\Theta_{21}(b, x)$, pour tous a dans M_1, b dans M_2 et x atome de M_1. D'après le lemme 3.20 (i), l'élément $\Theta_{21}(b, x)$ est un atome et donc l'élément $ab\Theta(b, x)$ est successeur immédiat de l'élément ab. De plus, l'élément ab n'est pas un multiple à droite de l'élément ax puisque x appartient à M_1 et b appartient à M_2. Donc on a $ab \vee ax = ax\Theta_{12}(x, b)$ et la forme de l'application $\varphi_{a,ax}$ résulte de la relation (1.4). D'après le lemme 1.15, l'application φ est déterminée par les applications $\varphi_{a,ax}$ parce que l'élément ax est successeur immédiat de l'élément a. ■

Exemple 3.23 Soit M_1 le monoïde donné par la présentation $\langle x; \rangle$ et soit M_2 le monoïde donné par la présentation $\langle y, z;\ zy = yz \rangle$ (autrement dit, M_i est le monoïde commutatif libre en i générateurs). Ces monoïdes sont des monoïdes de Garside et les éléments de Garside minimaux sont $\Delta_1 = x$ et $\Delta_2 = yz$. Soit * l'automorphisme non trivial de M_2, c'est-à-dire l'homomorphisme de M_2 sur M_2 défini par $y^* = z$ et $z^* = y$. On définit une famille $\vec{\Theta}$ des fonctions vérifiant les identités de résidu comme suit :

$$\begin{aligned} \Theta_{12}(a, b) &= b^*, && \text{pour tous } a \text{ dans } M_1 \text{ et } b \text{ dans } M_2, \\ \Theta_{21}(b, a) &= a, && \text{pour tous } a \text{ dans } M_1 \text{ et } b \text{ dans } M_2. \end{aligned}$$

Le produit croisé $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$, noté M, est le monoïde donné par la présentation

$$M = \langle x, y, z;\ yz = zy,\ xy = zx,\ xz = yx \rangle. \tag{3.8}$$

L'élément de Garside du monoïde M est le produit des éléments de Garside des monoïdes M_1 et M_2, c'est-à-dire l'élément xyz. Puisque le produit croisé ne dépend pas de

l'ordre des monoïdes M_1 et M_2, le graphe caractéristique de M est à la fois un produit semi-direct $M(\Delta_1) \ltimes M(\Delta_2)$ et à la fois un produit semi-direct $M(\Delta_2) \ltimes M(\Delta_1)$ (voir la figure 3.8).

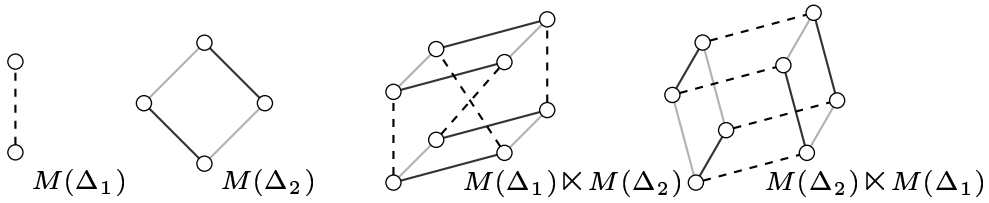


FIG. 3.8 – Les produits semi-directs des graphes caractéristiques des monoïdes de l'exemple 3.23 donnent le graphe caractéristique du monoïde présenté par (3.8). Les arêtes pointillées représentent x, les grises représentent y et les noires représentent z.

Deuxième partie

Systèmes auto-distributifs idempotents

Chapitre 4

Identités LD, I, LI et leurs expansions

Ce chapitre est consacré aux identités d'auto-distributivité à gauche, d'idempotence et de pseudo-idempotence à gauche. On définit les expansions d'un terme t comme certains termes équivalents à t de longueur plus grand de t et on montre que les expansions forment une famille confluente. Ensuite on définit les coupures d'un terme t et on étudie quels termes s'obtiennent comme des coupures des expansions du terme t. Cela permet de trouver une forme normale de t lorsque t est une coupure d'un autre terme t_0.

Dans la section 1, on définit les expansions d'un terme et on montre la confluence. Dans la section 2, on regarde les termes comme des arbres et on introduit des définitions qui viennent de ce point de vue. Dans la section 3, on définit les coupures d'un terme et on donne des caractérisations des coupures des expansions. Dans la section 4, on définit la forme t_0-∂-normale.

4.1 Confluence des expansions

Dans cette section on travaille avec des termes binaires, c'est-à-dire des termes avec une opération binaire, notée $\cdot$. Cette opération n'est pas supposée associative et donc on doit utiliser un parenthésage pour distinguer l'ordre des multiplications. Néanmoins, il est parfois plus commode de ne pas écrire trop de parenthèses, dans ce cas là on écrit $x \cdot y \cdot z$ au lieu de $x \cdot (y \cdot z)$. On considère ici trois identités :

$$\text{Auto-distributivité à gauche – LD} \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y), \tag{4.1}$$

$$\text{Idempotence – I} \qquad x \cdot x = x, \tag{4.2}$$

$$\text{Pseudo-idempotence à gauche – LI} \qquad (x \cdot x) \cdot y = x \cdot y. \tag{4.3}$$

On dit d'habitude « distributivité à gauche » au lieu d'auto-distributivité à gauche et on dit « idempotence à gauche » au lieu de pseudo-idempotence à gauche. On voit que

l'idempotence à gauche est une version faible de l'idempotence. On note LDI la famille d'identités LD+I et LDLI la famille d'identités LD+LI.

On introduit dans cette section la notion d'expansion d'un terme et on montre que les expansions forment une famille confluente, c'est-à-dire que deux expansions quelconques ont toujours une expansion commune. On fixe dans toute la suite un ensemble des variables X. On note T_X l'ensemble des termes dont les variables sont dans X.

Définition : Soient t, t' deux termes de T_X.
(i) On dit que t' est une *LD-expansion de base* du terme t s'il est obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$ par le sous-terme $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)$.
(ii) On dit que t' est une *I-expansion de base* du terme t s'il est obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme t_1 par le sous-terme $t_1 \cdot t_1$.
(iii) On dit que t' est une *LI-expansion de base* du terme t s'il est obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme $t_1 \cdot t_2$ par le sous-terme $(t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$.
(iv) On dit que t' est une *LDI-expansion de base* du terme t si t' est ou bien une LD-expansion de base de t ou bien une I-expansion de base de t.
(v) On dit que t' est une *LDLI-expansion de base* du terme t si t' est ou bien une LD-expansion de base de t ou bien une LI-expansion de base de t.

Dans toute la suite on suppose que $\Box$ est une des familles d'identités LD, I, LI, LDI, LDLI. On note $\stackrel{\Box}{=}_X$ la plus petite congruence sur l'ensemble T_X engendrée par les identités $\Box$. Par construction, si un terme t' est une $\Box$-expansion de base de t alors les termes t et t' sont $\Box$-équivalents, c'est-à-dire on a $t \stackrel{\Box}{=}_X t'$. L'implication réciproque est exprimée dans le lemme suivant qui est facile :

Lemme 4.1 *Soient t, t' deux termes de T_X. Alors les termes t et t' sont $\Box$-équivalents si et seulement s'il existe une suite des termes $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ telle que, pour chaque i entre 1 et k, soit t_i est une $\Box$-expansion de base de t_{i-1} soit t_{i-1} est une $\Box$-expansion de base de t_i.*

La proposition suivante dit que l'on peut omettre l'indice X dans la notation de la relation $\stackrel{\Box}{=}_X$:

Proposition 4.2 *Supposons que X est inclus dans X', Alors, pour deux termes quelconques t, t' de T_X, la relation $t \stackrel{\Box}{=}_{X'} t'$ est équivalente à $t \stackrel{\Box}{=}_X t'$.*

DÉMONSTRATION : Supposons que t et t' appartiennent à T_X et que l'on a $t \stackrel{\Box}{=}_{X'} t'$. D'après le lemme 4.1, il existe une suite $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ telle que les termes voisins sont des $\Box$-expansions de base les uns des autres. Puisque les $\Box$-expansions conservent l'ensemble des variables qui apparaissent dans les termes, tous les termes t_i, pour $i \leqslant k$, appartiennent à T_X. D'après le lemme 4.1 de nouveau, on a $t \stackrel{\Box}{=}_X t'$. ■

On itère la notion d'expansion de sorte qu'une $\Box$-expansion de base soit une 1-$\Box$-expansion.

Définition : On dit qu'un terme t' est une *k-¤-expansion* du terme t s'il existe une suite $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ telle que t_i est une ¤-expansion de base de t_{i-1}, pour tous i entre 1 et k. On dit que t' est une *¤-expansion* de t (notation $t \xrightarrow{¤} t'$) s'il existe k tel que t' est une k-¤-expansion du terme t.

Le lemme suivant est facile :

Lemme 4.3 *Supposons que t'_i est une k_i-¤-expansion du terme t_i, pour $i = 1, 2$. Alors le terme $t'_1 \cdot t'_2$ est une $(k_1 + k_2)$-¤-expansion du terme $t_1 \cdot t_2$.*

En suivant [12] on introduit une opération de distributivité à gauche itérée :

Définition (distribution uniforme [12]) : Soient t_0, t deux termes. Le terme $t_0 * t$ est définit inductivement :

$$t_0 * t = \begin{cases} t_0 \cdot t & \text{si } t \text{ est une variable,} \\ (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

On peut montrer par induction que le terme $t_0 * t$ s'obtient à partir du terme t en appliquant la substitution $x \mapsto t_0 \cdot x$.

Lemme 4.4 [12]
(i) Pour tous termes t_0, t, le terme $t_0 * t$ est une LD-expansion du terme $t_0 \cdot t$.
(ii) Supposons que t' est une ¤-expansion d'un terme t. Alors, pour chaque t_0, le terme $t_0 \cdot t'$ est une ¤-expansion du terme $t_0 \cdot t$.
(iii) Supposons $t_0 \xrightarrow{\text{LD}} t'_0$. Alors, pour chaque t, on a $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LD}} (t'_0 * t)$.
(iv) Supposons $t_0 \xrightarrow{\text{LDI}} t'_0$. Alors, pour chaque t, on a $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LDI}} (t'_0 * t)$.
(v) Supposons $t_0 \xrightarrow{\text{LDLI}} t'_0$. Alors, pour chaque t, on a $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LDLI}} (t'_0 * t)$.
(vi) Pour tous t_0, t_1, t_2, on a $(t_0 * (t_1 * t_2)) \xrightarrow{\text{LD}} ((t_0 * t_1) * (t_0 * t_2))$.

DÉMONSTRATION : Les résultats (i), (iii) et (vi) sont montrés dans [12] donc on montre uniquement les résultats (ii), (iv) et (v).

Commençons par (ii). Il suffit de faire la démonstration lorsque le terme t' est une ¤-expansion de base du terme t. Supposons d'abord $t' = t \cdot t$ donc $t \xrightarrow{\text{I}} t'$. On a $t_0 * t' = (t_0 * t) \cdot (t_0 * t)$, ce qui est une I-expansion du terme $t_0 * t$.

Ensuite, supposons $t = t_1 \cdot t_2$ et $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$, ce qui est un cas particulier de LI-expansion. On a alors $t_0 * t' = ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_1)) \cdot (t_0 * t_2)$ qui est une LI-expansion du terme $(t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2)$.

Ensuite, supposons $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ et $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$. On a

$$t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot ((t_0 * t_3) \cdot (t_0 * t_4)) \xrightarrow{\text{LD}} ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_3)) \cdot ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_4)) = t_0 * t'.$$

Les autres cas sont montrés par induction sur t. Supposons que t' est une ¤-expansion de base de t, différente des expansions déjà considérées. Si t est une variable alors le résultat

est vrai puisque aucune autre expansion de base n'est possible. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$ et que t' est obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme s de t par un sous-terme s'. Si s est un sous-terme de t_1 alors le terme t' s'écrit comme $t'_1 \cdot t_2$, pour t'_1, une ¤-expansion du terme t_1. Par hypothèse d'induction, $t_0 * t'_1$ est une ¤-expansion du terme $t_0 * t_1$ et on trouve

$$t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) \xrightarrow{¤} (t_0 * t'_1) \cdot (t_0 * t_2) = t_0 * t'.$$

Le cas où s est un sous-terme de t_2 est semblable et le cas $s = t$ a été déjà traité au début de la démonstration.

Enfin, considérons le point (iv) qui se montre par induction sur t. Si t est une variable, on a $t'_0 * t = t'_0 \cdot t$ qui est, d'après le lemme 4.3, une LDI-expansion du terme $t_0 \cdot t$. Supposons maintenant $t = t_1 \cdot t_2$. D'après hypothèse d'induction, le terme $t'_0 * t_i$ est une LDI-expansion du terme $t_0 * t_i$, pour $i = 1, 2$. On en déduit, d'après le lemme 4.3, $t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) \xrightarrow{\text{LDI}} (t'_0 * t_1) \cdot (t'_0 * t_2) = t'_0 * t$ et c'est ce que l'on voulait démontrer. La démonstration du point (v) est semblable. ■

On introduit maintenant les opérateurs de *dilatation*. On montre après que ces opérateurs jouent le rôle d'une sorte des « majorants » pour toutes les expansions de base possibles d'un terme.

Définition (opérateurs ∂ [12]) : Supposons que t est un terme. On définit les termes $\partial_{\text{LD}} t$, $\partial_{\text{LDI}} t$ et $\partial_{\text{LDLI}} t$ de la façon inductive :

$$\partial_{\text{LD}} t = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ est une variable,} \\ \partial_{\text{LD}} t_1 * \partial_{\text{LD}} t_2 & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\partial_{\text{LDI}} t = \begin{cases} t \cdot t & \text{si } t \text{ est une variable,} \\ \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDI}} t_2 & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\partial_{\text{LDLI}} t = \begin{cases} t & \text{si } t \text{ est une variable,} \\ \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2 & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Exemple 4.5 Considérons le terme $t = x \cdot (y \cdot z)$. On va calculer les termes $\partial_{¤} t$ explicitement. Puisque la définition est inductive, on va déterminer les ∂'s des sous-termes de t. On a $\partial_{\text{LD}} x = x$, $\partial_{\text{LD}} y = y$, $\partial_{\text{LD}} z = z$ et $\partial_{\text{LD}} yz = y * z = y \cdot z$ et donc on a $\partial_{\text{LD}} t = x * (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$. Pour LDI on a $\partial_{\text{LDI}} x = x \cdot x$, $\partial_{\text{LD}} y = y \cdot y$, $\partial_{\text{LD}} z = z \cdot z$ et $\partial_{\text{LD}} yz = (y \cdot y) * (z \cdot z) = ((y \cdot y) \cdot z) \cdot ((y \cdot y) \cdot z)$. Donc on a $\partial_{\text{LDI}} t = (x \cdot x) * ((y \cdot y) \cdot z) \cdot ((y \cdot y) \cdot z) =$

$$((((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)) \cdot ((((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)).$$

Enfin, pour LDLI on a $\partial_{\text{LDLI}} z = z$ et $\partial_{\text{LDLI}} yz = (y \cdot y) * z = ((y \cdot y) \cdot z)$ et donc on a $\partial_{\text{LDLI}} t = (x \cdot x) * ((y \cdot y) \cdot z) = (((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)$.

Dans [12], il est montré que $\partial_{\text{LD}} t$ est une LD-expansion de toutes les LD-expansions de base de t possibles. Dans [38], Larue a montré que $\partial_{\text{LDI}} t$ est une LDI-expansion des

toutes les LDI-expansions de base de t. De la même façon, on va montrer que $\partial_{\text{LDLI}}t$ est une LDLI-expansion des toutes les LDLI-expansions de base du terme t. On commence par la liaison entre $\partial_{\text{LD}}t$, $\partial_{\text{LDI}}t$ et $\partial_{\text{LDLI}}t$.

Lemme 4.6 [38] *(i) Pour chaque t, on a $\partial_{\text{LDI}}t = \partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDLI}}t$.*
(ii) Pour chaque t, on a $\partial_{\text{LD}}t \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}}t \xrightarrow{\text{I}} \partial_{\text{LDI}}t$.

DÉMONSTRATION : (i) On montre le résultat par induction sur t. Le résultat est évident lorsque t est une variable. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. On a

$$\partial_{\text{LDI}}t = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2 = \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{\text{LDLI}}t_2 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_2) = \\ = (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_2) \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_2) = \partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDLI}}t.$$

(ii) La relation $\partial_{\text{LDLI}}t \xrightarrow{\text{I}} \partial_{\text{LDI}}t$ résulte de (i). On montre $\partial_{\text{LD}}t \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}}t$ par induction sur t. C'est vrai lorsque t est une variable, considérons $t = t_1 \cdot t_2$. On a alors $\partial_{\text{LD}}t = \partial_{\text{LD}}t_1 * \partial_{\text{LD}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t = \partial_{\text{LDLI}}t$. ■

Définition : Pour chaque terme t on définit $\lg(t)$ comme suit :

$$\lg(t) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } t \text{ est une variable,} \\ \lg(t_1) + \lg(t_2) + 1 & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.8}$$

Le nombre $\lg(t)$ signifie le nombre de variables plus le nombre de signes $\cdot$ qui apparaissent dans le terme t.

Lemme 4.7 *Pour chaque terme t, on a les inégalités*

$$\lg(\partial_{\text{LD}}t) \leqslant \lg(\partial_{\text{LDLI}}t) \leqslant 2^{\lg(t)} - 1 \qquad \textit{et} \qquad \lg(\partial_{\text{LDI}}t) \leqslant 2^{\lg(t)+1} - 1. \tag{4.9}$$

DÉMONSTRATION : D'abord on a l'égalité suivante qui est démontrée dans [12] :

$$\lg(t_0 * t) = (\lg(t_0) + 3)(\lg(t) + 1)/2 - 1.$$

Maintenant on montre la borne pour $\partial_{\text{LDI}}t$ par induction sur t. La borne est vraie lorsque t est une variable. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. On trouve

$$\begin{aligned} \lg(\partial_{\text{LDI}}t) &= \lg(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2) = (\lg(\partial_{\text{LDI}}t_1) + 3)(\lg(\partial_{\text{LDI}}t_2) + 1)/2 - 1 \\ &\leqslant (2^{\lg(t_1)+1} - 1 + 3)(2^{\lg(t_2)+1} - 1 + 1)/2 - 1 \\ &= 2^{\lg(t_1)+\lg(t_2)+1} + 2^{\lg(t_2)+1} - 1 \\ &\leqslant 2^{\lg(t_1)+\lg(t_2)+2} - 1 = 2^{\lg(t)+1} - 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.6, on a $\lg(\partial_{\text{LDI}}t) = 2\lg(\partial_{\text{LDLI}}t) + 1$. Et l'inégalité $\lg(\partial_{\text{LD}}t) \leqslant \lg(\partial_{\text{LDLI}}t)$ est évidente. ■

D'ici, jusqu'à la fin de la section, le symbole ¤ note une de familles d'identités LD, LDI ou LDLI.

Lemme 4.8 *Pour chaque terme t, on a $t \xrightarrow{\text{¤}} \partial_{\text{¤}} t$.*

DÉMONSTRATION : Le fait $t \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LD}} t$ est montré dans [12]. Ensuite, considérons le cas $\partial_{\text{LDLI}} t$ que l'on montre par induction sur t. Le résultat est vrai lorsque t est une variable. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. On a $\partial_{\text{LDLI}} t = \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2$. Par hypothèse d'induction, le terme $\partial_{\text{LDLI}} t_1$ est une LDLI-expansion du terme t_1 et le terme $\partial_{\text{LDLI}} t_2$ est une LDLI-expansion du terme t_2 ce qui, d'après le lemme 4.4, implique

$$t_1 \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_1) \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2 .$$

Enfin, considérons le cas $\partial_{\text{LDI}} t$. D'après le lemme 4.6, si $\partial_{\text{LDLI}} t$ est une LDLI-expansion du terme t alors $\partial_{\text{LDI}} t$ est une LDI-expansion de t. ■

Maintenant on montre que ∂t est une expansion commune de toutes les expansions de base du terme t.

Proposition 4.9 *Soient t, t' deux termes. Si t' est une ¤-expansion de base de t alors $\partial_{\text{¤}} t$ est une ¤-expansion de t'.*

DÉMONSTRATION : (i) Le résultat $t' \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LD}} t$ est montré dans [12].

(ii) On montre $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t$ par induction sur t. Le résultat est immédiat lorsque t est une variable. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$ et que le terme t' et obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme s par un terme s'. Si s est un sous-terme du terme t_1 alors on a $t' = t'_1 \cdot t_2$, pour un certain t'_1. Puisque le terme t'_1 est une LDLI-expansion de base du terme t_1, par hypothèse d'induction, on sait que $\partial_{\text{LDLI}} t_1$ est une LDLI-expansion du terme t'_1. Maintenant on a $t'_1 \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LI}} \partial_{\text{LDI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LDLI}} t$. Le cas où s est un sous-terme de t_2 est semblable.

Deux cas manquent, à savoir une LI-expansion et une LD-expansion à la racine de t. Considérons d'abord $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$. On y a $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_1) \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 = \partial_{\text{LDI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LDLI}} t$. Maintenant l'autre cas, notamment $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ et $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$. D'après le lemme 4.8, le terme $\partial_{\text{LDLI}} t$ est une LDLI-expansion du terme $t_1 * t_2$. Mais ce terme est égal à $(t_1 * t_3) \cdot (t_1 * t_4)$ ce qui est une LD-expansion du terme t'_1.

(iii) On montre enfin $t' \xrightarrow{\text{LDI}} \partial_{\text{LDI}} t$. Si t' est une LDLI-expansion du terme t, on a fini puisque $\partial_{\text{LDI}} t$ est une I-expansion du terme $\partial_{\text{LDLI}} t$. Si t' est une I-expansion de base qui change un sous-terme de t, le même argument est possible comme dans le cas LDLI. Ce qui reste et donc $t' = t \cdot t$. On a $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t \cdot \partial_{\text{LDLI}} t = \partial_{\text{LDI}} t$, ce qui est le résultat voulu. ■

Exemple 4.10 Le terme $\partial_{\text{¤}} t$ n'est pas en général la plus petite ¤-expansion commune de toutes les ¤-expansion de base du terme t. Définissons le plein terme de hauteur k sur la variable x comme :

$$\text{full}_0 = x \qquad \text{full}_k = \text{full}_{k-1} \cdot \text{full}_{k-1} . \tag{4.10}$$

Considérons $t = (x \cdot x) \cdot x \cdot x \cdot x$. Il est facile à vérifier que le terme full_3 est une LD-expansion de toutes les LD-expansions de base du terme t et que le terme full_4 est une

LDI-expansion de toutes les LDI-expansions de base du terme t. Pourtant, le terme $\partial_{\text{LD}}t$ est une LD-expansion propre du terme full_3 et le terme $\partial_{\text{LDI}}t$ est une LDI-expansion propre du terme full_4. Un exemple pour LDLI est semblable.

Le terme suivant est de montrer que les opérateurs ∂ sont croissants par rapport aux expansions.

Lemme 4.11 *Soient t, t' deux termes. Alors $t \xrightarrow{\text{¤}} t'$ implique $\partial_{\text{¤}}t \xrightarrow{\text{¤}} \partial_{\text{¤}}t'$.*

DÉMONSTRATION : Le résultat, pour l'identité LD, est montré dans [12]. Considérons le cas de LDLI, en supposant que t' est une LDLI-expansion de base de t. On utilise induction sur t. Quand t est une variable, le résultat est immédiat. Supposons alors $t = t_1 \cdot t_2$. Le terme t est obtenu à partir de t en remplaçant un terme s par un terme s'. Si s est un sous-terme de t_1 alors le terme t' est de la forme $t'_1 \cdot t$, pour un certain t'_1. Par hypothèse d'induction, le terme $\partial_{\text{LDLI}}t'_1$ est une LDLI-expansion du terme $\partial_{\text{LDLI}}t_1$ et cela donne $\partial_{\text{LDLI}}t = (\partial_{\text{LDLI}}t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}}t'_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t'_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 = \partial_{\text{LDLI}}t'$. Le cas de s, un sous-terme de t_2, est semblable.

Pour $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$, on a $\partial_{\text{LDLI}}t = (\partial_{\text{LDLI}}t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_1 = \partial_{\text{LDLI}}t'$. Pour $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ et $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$, on a $\partial_{\text{LDLI}}t = \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{\text{LDI}}t_3 * \partial_{\text{LDLI}}t_4)$ et $\partial_{\text{LDLI}}t' = (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_3) * (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_4)$ et on peut utiliser le lemme 4.4. Tous les cas ont été exploités et ce montre le résultat pour LDLI. La démonstration pour LDI est semblable à celle pour LDLI. ■

Maintenant on est prêt à montrer le résultat principal de cette section, à savoir la confluence des ¤-expansions.

Définition : Pour deux termes t et t' on définit $d_{\text{¤}}(t, t')$, la *¤-distance* entre t et t', comme le nombre minimal de ¤-identités qui doivent être utilisées pour obtenir t' à partir de t. Si t et t' ne sont pas ¤-équivalents, on pose $d_{\text{¤}}(t, t') = \infty$.

Proposition 4.12 *Soient t et t' deux termes. Supposons $d_{\text{¤}}(t, t') = k < \infty$. Alors le terme $\partial^k_{\text{¤}}t$ est une ¤-expansion de t'.*

DÉMONSTRATION : On utilise induction sur k. Le résultat est clair pour $k = 0$, supposons donc $k > 0$. Il existe un terme t'' avec $d_{\text{¤}}(t, t'') = k - 1$ et $d_{\text{¤}}(t', t'') = 1$. Par hypothèse d'induction, l'élément $\partial^{k-1}_{\text{¤}}t$ est une ¤-expansion du terme t. Il y a maintenant deux possibilités : soit t'' est une ¤-expansion de base du terme t', dans ce cas là on a $t' \xrightarrow{\text{¤}} t'' \xrightarrow{\text{¤}} \partial^{k-1}_{\text{¤}}t \xrightarrow{\text{¤}} \partial^k_{\text{¤}}t$, soit t' est une ¤-expansion de base du terme t'', dans ce cas là l'élément $\partial_{\text{¤}}t''$ est une ¤-expansion du terme t', d'après le lemme 4.9. Ensuite, d'après le lemme 4.11, le terme $\partial^k_{\text{¤}}t$ est une ¤-expansion du terme $\partial_{\text{¤}}t''$ et donc aussi une ¤-expansion du terme t'. ■

Puisque pour chaque terme t', une k-¤-expansion d'un terme t, on a $d_{\text{¤}}(t, t') \leqslant k$, on en déduit :

Corollaire 4.13 *Supposons qu'un terme t' est une k-¤-expansion d'un terme t. Alors le terme $\partial^k_{¤} t$ est une ¤-expansion du terme t'.*

Il vaut de remarquer que, pour n'importe quelle paire t et t' de termes, la relation $t \xrightarrow{¤} t'$ est décidable. Il suffit d'énumérer toutes les ¤-expansion du terme t' qui ont plus petite longueur que t parce que le nombre de telles expansions est fini.

4.2 Termes comme arbres

Dans cette section préparatoire on identifie les termes et les arbres binaires. On introduit des définitions qui sont naturelles du point de vue des arbres et qui facilitent le travail avec les termes.

Chaque terme d'un ensemble T_X peut être naturellement représenté comme un arbre binaire dont les feuilles sont étiquetées par des variables de X. On voit un exemple dans la figure 4.1.

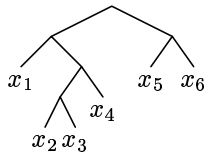


FIG. 4.1 – L'arbre qui représente le terme $(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)) \cdot (x_5 \cdot x_6)$.

Chaque sous-terme s d'un terme t est associé à un chemin dans l'arbre qui représente t – le chemin de la racine de t vers la racine de s. Ce chemin peut être décrit comme une suite de bifurcations vers la gauche ou vers la droite.

Définition : Une *adresse* est une suite finie de 0's et 1's. L'adresse vide est notée $\varnothing$. L'ensemble de toutes les adresses est noté $\mathbf{A}$. Une adresse α est dite *finale* si on a $\alpha = 1^p$ pour $p \geqslant 0$.

Quand on écrit des adresses, on ajoute simplement un chiffre après un autre ; donc 00 et 1011 sont des adresses qui correspondent respectivement au chemins « gauche–gauche » et « droite–gauche–droite–droite ». Si α et β sont deux adresses, alors $\alpha\beta$ est l'adresse obtenue en concaténant les adresses α et β. L'ensemble $\mathbf{A}$ équipé avec la concaténation est le monoïde libre sur $\{0, 1\}$.

Définition : Pour α et β dans $\mathbf{A}$, on dit que α est un *préfixe* de β, notation $\alpha \sqsubseteq \beta$, si on a $\beta = \alpha\gamma$ pour une adresse γ de $\mathbf{A}$.

Lemme 4.14 [12] *La relation $\sqsubseteq$ est un ordre partiel sur $\mathbf{A}$; l'adresse $\varnothing$ est l'élément minimal et, pour chaque adresse α, les préfixes de α sont totalement ordonnés par $\sqsubseteq$.*

Définition : Pour α, β dans $\mathbf{A}$, on dit que α se trouve *à droite de* β ou que β se trouve *à gauche de* α, notation $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ s'il existe une adresse γ qui satisfait $\gamma 1 \sqsubseteq \alpha$ et $\gamma 0 \sqsubseteq \beta$. On dit que α et β sont orthogonales, notation $\alpha \perp \beta$, si on a $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ ou $\beta >_{\text{LR}} \alpha$.

La relation $>_{\text{LR}}$ est un ordre partiel sur $\mathbf{A}$.

Définition (précédence) : Pour α, β dans $\mathbf{A}$, on écrit $\alpha > \beta$ si et seulement si on a $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ ou $\alpha \sqsubset \beta$.

Lemme 4.15 [12] *La relation $<$ est un ordre total sur $\mathbf{A}$ et $\varnothing$ est maximal dans $(\mathbf{A}, <)$. Chaque adresse sous la forme $\alpha 1$ admet α comme le successeur immédiat et chaque adresse sous la forme $\alpha 0$ est la borne inférieure de la suite décroissante $\alpha 1$, $\alpha 10$, $\alpha 100$, ...*

Définition : Supposons que t est un terme. Pour α, une adresse de $\mathbf{A}$, le *sous-terme de t à α*, ou le α-sous-terme de t, est le terme $\text{sub}(t, \alpha)$, spécifié possiblement comme :

$$\text{sub}(t, \alpha) = \begin{cases} t & \text{pour } \alpha = \varnothing, \\ \text{sub}(t_1, \beta) & \text{pour } \alpha = 0\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2, \\ \text{sub}(t_2, \beta) & \text{pour } \alpha = 1\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.11}$$

Exemple 4.16 Considérons le terme t de la figure 4.1. On a, par exemple, $\text{sub}(t, 1) = x_5 \cdot x_6$, $\text{sub}(t, 01) = (x_2 \cdot x_3) \cdot x_4$ et $\text{sub}(t, 0110) = x_3$. Remarquons aussi que le terme $\text{sub}(t, 000)$ n'est pas défini.

Lemme 4.17 [12] *Soit t un terme et soient α et β deux adresses. Alors on a $\text{sub}(t, \alpha\beta) = \text{sub}(\text{sub}(t, \alpha), \beta)$: soit les deux termes existent et ils sont égaux, soit aucun d'eux n'est défini.*

Définition : Soit t un terme. On dit que α est une adresse *dans* t si le sous-terme $\text{sub}(t, \alpha)$ existe. Dans ce cas là, on dit que α est *externe* dans t si $\text{sub}(t, \alpha)$ est une variable, et est *interne* autrement. Le *squelette* de t est défini comme l'ensemble $\text{Skel}(t)$ de toutes les adresses dans t ; le *contour* de t est défini comme l'ensemble $\text{Out}(t)$ de toutes les adresses externes dans t.

Exemple 4.18 Soit t le terme de la figure 4.1. Alors le squelette de t consiste en 11 adresses, à savoir 00, 0100, 0101, 010, 011, 01, 0, 10, 11, 1 et $\varnothing$, ordonnées par l'ordre $<$. Parmi eux, les adresses 11, 10, 011, 0101, 0100 et 00 sont dans le contour de t. Ces adresses sont ordonnées par l'ordre $>_{\text{LR}}$.

Définition : Supposons que α est une adresse et que B est un ensemble d'adresses. On définit $\text{sh}_\alpha(B)$ comme l'ensemble $\{\alpha\beta;\ \beta \in B\}$.

Lemme 4.19 [12] *Pour un terme t, égal à $t_1 \cdot t_2$, on a*

$$\mathrm{Skel}(t) = \{\varnothing\} \cup \mathrm{sh}_0(\mathrm{Skel}(t_1)) \cup \mathrm{sh}_1(\mathrm{Skel}(t_2)), \tag{4.12}$$
$$\mathrm{Out}(t) = \mathrm{sh}_0(\mathrm{Out}(t_1)) \cup \mathrm{sh}_1(\mathrm{Out}(t_2)). \tag{4.13}$$

Lemme 4.20 [12] *Supposons que t est un terme. Alors une adresse α appartient au squelette de t si seulement s'il existe β telle que $\alpha\beta$ appartient au contour de t.*

Notation : Soit t un terme et soit α de $\mathrm{Skel}(t)$. Alors il existe des entiers uniques p et q tels que $\alpha 0^p$ et $\alpha 1^q$ appartiennent au contour de t. S'il n'y a aucune confusion, on écrit $\alpha 0^*$ et $\alpha 1^*$ pour ces adresses pour éviter l'introduction de p et q.

4.3 Coupures d'un terme

Le but de cette section est de donner un critère permettant de montrer que deux termes ne sont pas LDI- ou LDLI-équivalents. Pour l'instant, il existe deux méthodes principales syntactiques pour montrer que deux termes t et t' ne sont pas LDI-équivalents :
- regarder les variables : les termes t et t' sont LDI-équivalents seulement s'ils ont le même ensemble de variables, la même variable la plus à gauche et la même variable la plus à droite ;
- associer un poids : on chosit un nombre p entre 0 et 1 et des nombres w_x, pour chaque variable x, et et on définit le poids d'un terme s comme

$$w(s) = \begin{cases} w_x & \text{pour } s = x, \text{ une variable,} \\ p \cdot w(s_1) + (1-p) \cdot w(s_2) & \text{pour } s = s_1 \cdot s_2. \end{cases} \tag{4.14}$$

Il est facile à vérifier que deux termes t et t' sont LDI-équivalents seulement si on a $w(t) = w(t')$ quel que soit le poids w : on a évidemment $w(t_1) = w(t_1 \cdot t_1)$ et $w(t_1 \cdot t_2 \cdot t_3) = w((t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3))$ et le reste résulte d'induction.

On va construire maintenant un nouveau critère. On définit ici les sous-termes à gauche itérées d'un terme et les coupures d'un terme et on montre qu'il s'agit, à $\mathbin{\text{¤}}$-près, de la même notion. On en donne ensuite une autre caractérisation quelle permet de montrer dans cas particuliers qu'un terme t ne peut pas être un sous-terme d'un terme t'. Le symbole $\mathbin{\text{¤}}$ désigne de nouveau une quelconque des familles d'identités LD, LDI ou LDLI.

Définition (sous-terme à gauche itéré) : Pour deux termes t_1 et t_2 on écrit $t_1 \sqsubset t_2$ si on a $t_1 = \mathrm{sub}(t_1, 0^p)$ pour un $p > 0$. On note $t_1 \sqsubseteq t_2$ la même relation avec $p \geqslant 0$. On écrit $t_1 \sqsubseteq_{\text{¤}} t_2$ s'il existe des termes t_1 et t_2 avec $t_1' \overset{\text{¤}}{=} t_1$, $t_2' \overset{\text{¤}}{=} t_2$ et $t_1' \sqsubseteq t_2'$.

Il est évident que les relations $\sqsubset$ et $\sqsubseteq$ sont transitives. La même chose est vraie pour $\sqsubseteq_{\text{¤}}$ parce que les relations $t \sqsubseteq_{\text{¤}} t'$ et $t' \sqsubseteq_{\text{¤}} t''$ entraînent l'existence de termes $s_1, \ldots, s_p$

et $s'_1, \ldots, s'_{p'}$ satisfaisants $t' \overset{\text{¤}}{=} (\cdots(t \cdot s_1) \cdot s_2) \cdots) \cdot s_p$ et $t'' \overset{\text{¤}}{=} (\cdots(t' \cdot s'_1) \cdot s'_2) \cdots) \cdot s'_{p'}$. Donc on a

$$t'' \overset{\text{¤}}{=} (\cdots(\cdots(t \cdot s_1) \cdot s_2) \cdots) \cdot s_p) \cdot s'_1) \cdot s'_2) \cdots) \cdot s'_{p'}$$

et on voit $t \sqsubseteq_{\text{¤}} t''$.

La relation $\sqsubseteq_{\text{LD}}$ est un ordre partiel, c'est-à-dire, on a $t_1 \sqsubseteq_{\text{LD}} t_2$ en même temps que $t_2 \sqsubseteq_{\text{LD}} t_2$ si et seulement si on a $t_1 \overset{\text{LD}}{=} t_2$ (voir [12]). Ce résultat est en défaut pour $\sqsubseteq_{\text{LDI}}$ et $\sqsubseteq_{\text{LDLI}}$: on a, par exemple, $x{\cdot}y \sqsubset (x{\cdot}y){\cdot}x \sqsubset ((x{\cdot}y){\cdot}x){\cdot}((x{\cdot}y){\cdot}y)$ et $x{\cdot}y \overset{\text{LDI}}{=} ((x{\cdot}y){\cdot}x){\cdot}((x{\cdot}y){\cdot}y)$. Mais les termes $x \cdot y$ et $(x \cdot y) \cdot x$ ne sont pas LDI-équivalents parce que les identités LD et I préservent la variable la plus à droite. Par conséquent, on a $x \cdot y \sqsubseteq_{\text{LDI}} (x \cdot y) \cdot x$ et $(x \cdot y) \cdot x \sqsubseteq_{\text{LDI}} x \cdot y$ tandis que l'on a $x \cdot y \overset{\text{LDI}}{\neq} (x \cdot y) \cdot x$.

Une bonne propriété des sous-termes itérés est qu'ils sont, à ¤-expansions près, préservés par ¤-expansion :

Proposition 4.21 *Soient t et t' deux termes. Supposons que t' est k-¤-expansion du terme t et que* $\mathrm{sub}(t, 0^p)$ *est défini. Alors il existe p' et k' avec $p' \geqslant p$ et $k' \leqslant k$ tels que* $\mathrm{sub}(t', 0^{p'})$ *est une k'-¤-expansion du terme* $\mathrm{sub}(t, 0^p)$.

DÉMONSTRATION : On peut supposer que t' est une ¤-expansion de base du terme t. On montre le résultat par induction sur t. Lorsque t est une variable, le résultat est vrai. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$ et $t' = t'_1 \cdot t'_2$. Si p est égal à 0, alors le résultat est trivial. Supposons $p > 0$. On a trois possibilités. Si t' est obtenu à partir de t en remplaçant un sous-terme de t_1, alors on a, pour chaque p' assez grand, les égalités $\mathrm{sub}(t', 0^{p'}) = \mathrm{sub}(t'_1, 0^{p'-1})$ et, par hypothèse d'induction, il existe $p' \geqslant p$ tel que le terme $\mathrm{sub}(t'_1, 0^{p'-1})$ soit est égal à $\mathrm{sub}(t_1, 0^{p-1})$ soit est une expansion de base du terme $\mathrm{sub}(t_1, 0^{p-1})$. Si t' est obtenu en remplaçant un sous-terme de t_2, alors on a $\mathrm{sub}(t, 0^p) = \mathrm{sub}(t, 0^{p-1})$. Enfin, si l'expansion est faite en la racine de t, alors on a $t_2 = t_3 \cdot t_4$ et $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$ ou $t' = (t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_2)$ ou $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$ et on voit que l'on a $\mathrm{sub}(t, 0^p) = \mathrm{sub}(t, 0^{p+1})$. ■

Le lemme suivant est évident :

Lemme 4.22 *Supposons qu'un terme s est un sous-terme d'un terme t. Soit s' une k-¤-expansion du terme s. Soit t' le terme obtenu à partir de t en remplaçant le sous-terme s par le terme s'. Alors t' est une k-¤-expansion du terme t.*

Maintenant on définit la notion principale de cette section, à savoir une coupure d'un terme.

Définition : Pour un terme t et α dans $\mathrm{Skel}(t)$ on définit la *coupure de t en α* comme le terme $\mathrm{cut}(t, \alpha)$ par récurrence :

$$\mathrm{cut}(t, \alpha) = \begin{cases} t & \text{pour } \alpha = \varnothing, \\ \mathrm{cut}(t_1, \beta) & \text{pour } \alpha = 0\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2, \\ t_1 \cdot \mathrm{cut}(t_2, \beta) & \text{pour } \alpha = 1\beta \text{ et } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.15}$$

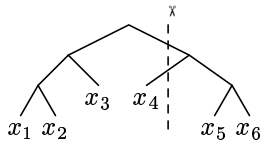


FIG. 4.2 – Coupure du terme $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot (x_5 \cdot x_6))$ en l'adresse 10 est le terme $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$.

Exemple 4.23 Faire une coupure d'un terme t en une adresse externe α consiste à couper l'arbre de t en deux juste après la feuille dont l'adresse est α. On enlève ce qui est à droite de la coupure et on reconstruit un terme avec ce qui reste à gauche (voir la figure 4.2). Considérons $t = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot (x_5 \cdot x_6))$. On a $\mathrm{cut}(t, 000) = x_1$, $\mathrm{cut}(t, 001) = x_1 \cdot x_2$, $\mathrm{cut}(t, 01) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$, $\mathrm{cut}(t, 10) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$, $\mathrm{cut}(t, 110) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot x_5)$ et $\mathrm{cut}(t, 111) = t$.

On n'a pas expliqué dans l'exemple, comment se représenter la coupure en une adresse interne. Ce cas est réglé par le lemme suivant :

Lemme 4.24 [12] *Supposons que t est un terme. Alors, pour chaque adresse α dans le squelette de t, on a* $\mathrm{cut}(t, \alpha) = \mathrm{cut}(t, \alpha 1^*)$.

On voit facilement que $s \sqsubseteq t$ implique que s est une coupure de t, pour deux termes s et t. D'un autre côté, si s est une coupure de t, alors on a $s \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t$:

Lemme 4.25 [12] *Soient t un terme et α une adresse du squelette de t. Soit s la coupure* $\mathrm{cut}(t, \alpha)$. *Alors il existe t', une LD-expansion du terme t, avec $s \sqsubseteq t'$. De plus, si α n'est pas finale, alors on a $s \sqsubset t'$.*

Exemple 4.26 Considérons $t = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$ et l'adresse 1010. La coupure de t en 1010 est $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. On a (voir la figure 4.3)

$$t \xrightarrow{\mathrm{LD}} (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)) \cdot x_1 \cdot x_5 \xrightarrow{\mathrm{LD}} (x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot x_4))) \cdot x_1 \cdot x_5$$
$$\xrightarrow{\mathrm{LD}} ((x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_4)) \cdot x_1 \cdot x_5$$

et on voit que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ est un sous-terme à gauche du dernier terme.

Les coupures arbitraires d'un terme t ne sont pas des sous-termes de t en général, mais elles peuvent être exprimées comme produits de sous-termes. On décrit la correspondance plus précisément :

Définition : Pour α une adresse, la *descente à gauche de* α est la suite finie $(\gamma_1 0, \ldots, \gamma_p 0)$ où $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ est l'énumération $\sqsubset$-croissante des préfixes γ qui satisfont $\gamma 1 \sqsubseteq \alpha$.

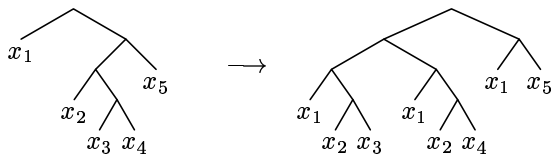


FIG. 4.3 – Le terme $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ peut se trouver comme un sous-terme à gauche d'une LD-expansion du terme $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$.

Par exemple, la descente à gauche de 010011 est la suite $(00, 01000, 010010)$. On voit par induction que la longueur de la descente à gauche d'une adresse α est égale au nombre de 1's dans α. Maintenant, la coupure en α est égale au produit des sous-termes associés à la descente à gauche de α. On rappelle qu'un manque de parenthèses signifie le parenthésage à droite.

Lemme 4.27 [12] *Supposons que t est un terme et que α est une adresse dans le squelette de t. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ l'arête à gauche de α. Alors on a*

$$\mathrm{cut}(t, \alpha) = \mathrm{sub}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{sub}(t, \alpha_p) \cdot \mathrm{sub}(t, \alpha), \tag{4.16}$$

$$\mathrm{cut}(t, \alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{cut}(t, \alpha_p) \cdot \mathrm{cut}(t, \alpha). \tag{4.17}$$

La proposition suivante exprime la différence entre des coupures voisines :

Proposition 4.28 [12] *Supposons que t est un terme, α une adresse non-finale du contour de t. Notons α^+ le successeur immédiat de α dans le contour de α et x la variable qui apparaît dans t en adresse α^+. Supposons $\mathrm{cut}(t, \alpha) = t_1 \cdot \cdots \cdot t_p$. Alors on a $\mathrm{cut}(t, \alpha^+) = t_1 \cdot \cdots \cdot t_p \cdot x$.*

Maintenant, l'étude des coupures dans le cas de l'identité LD diffère beaucoup de l'étude de coupures dans le cas de LDI, tous simplement parce que $\sqsubseteq_{\mathrm{LD}}$ est un ordre partiel. Désormais on ne considère plus le cas de LD mais seulement ceux de LDI et LDLI. On utilise maintenant le symbole H pour l'une de ces deux familles. On définit pour chaque terme t un ensemble $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$ et on montre que cet ensemble consiste exactement en toutes les coupures de termes H-équivalents à t.

Définition : Pour un terme t, on définit les ensembles $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$ et $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$ comme les plus petits ensembles de termes qui satisfont :
- chaque coupure du terme t appartient à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$;
- chaque terme s' H-équivalent à un terme s de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$ appartient à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$;
- soient s, s' deux termes de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$; s'il existe un terme t' dans $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$ dont s est la coupure en une adresse α et s' est la coupure en une adresse α' et si on a $\alpha \geqslant \alpha'$, alors le terme $s \cdot s'$ appartient à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$;
- soient s, s' deux termes de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$; s'il existe un terme t' dans $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$, dont s est la coupure en une adresse non-finale α et s' est la coupure en une adresse α' et si on a $\alpha \geqslant \alpha'$, alors le terme $s \cdot s'$ appartient à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$.

Proposition 4.29 *Soit t' un terme H-équivalent à un terme t. Alors chaque coupure de t' appartient à l'ensemble* $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$.

DÉMONSTRATION : On montre le résultat par induction sur le nombre $d_{\mathrm{H}}(t,t')$. Pour $t = t'$, le résultat est évident, supposons donc $d_{\mathrm{H}}(t,t') = k > 0$. Il existe un terme t'' satisfaisant $d_{\mathrm{H}}(t,t'') = k-1$ et $d_{\mathrm{H}}(t'',t') = 1$. Supposons d'abord que t' est une expansion de base du terme t'' en une adresse γ. Si t' est une LD-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$, d'après le lemme 4.27,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha \perp \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 00\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 10\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 01\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma 10)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 10\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha = \gamma 11\beta.
\end{array}$$

Si t' est une I-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{I}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha \perp \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{I}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha = \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 0\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 1\beta.
\end{array}$$

Si t' est une LI-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LI}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha \perp \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LI}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha = \gamma 1\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 00\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma 0)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 01\beta.
\end{array}$$

Supposons maintenant que t'' est une expansion de base du terme t dans l'adresse γ. Si t' est une LD-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LD}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha \perp \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 00\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 0\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 01\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma 10\beta, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LD}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha = \gamma 11\beta.
\end{array}$$

Si t' est une I-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pour } \alpha \perp \gamma, \\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pour } \alpha = \gamma\beta.
\end{array}$$

Si t' est une LI-expansion de base de t'', alors on a, pour chaque α dans $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LI}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) && \text{pour } \alpha \perp \gamma,\\
&\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LI}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) && \text{pour } \alpha = \gamma 1\beta,\\
&\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 00\beta) && \text{pour } \alpha = \gamma 0\beta.
\end{aligned}$$

On a considéré tous les cas possibles. Par hypothèse d'induction, toutes les coupures de t'' appartiennent à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t'')$. Les coupures considérées $\mathrm{cut}(t',\alpha)$ satisfont aux règles de la définition de l'ensemble $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t'')$ et donc ils appartiennent aussi à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t'')$. ■

La proposition 4.29 donne une condition nécessaire pour qu'un terme t' est équivalent à un terme t, on présent un exemple pour le terme $x \cdot y$:

Corollaire 4.30 *Définissons le poids $w(t)$ d'un terme t de $T_{x,y}$ comme suit :*

$$w(x) = 1, \qquad w(y) = -1, \qquad w(t_1 \cdot t_2) = (w(t_1) + w(t_2))/2 \tag{4.18}$$

Alors chaque terme t' LDI-équivalent au terme $x \cdot y$ satisfait l'inégalité $w(\mathrm{cut}(t',\alpha)) \geqslant 0$, pour chaque α dans $\mathrm{Skel}(t')$.

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 4.29, il suffit de montrer que l'on a $w(s) \geqslant 0$, pour chaque s de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(x \cdot y)$. Vérifions la définition de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(x \cdot y)$: chaque coupure s de $x \cdot y$ satisfait $w(s) \geqslant 0$; il est facile à voir que deux termes LDI-équivalents ont le même poids ; et pour chaque produit $s \cdot s'$, les inégalités $w(s) \geqslant 0$ et $w(s') \geqslant 0$ entraînent $w(s \cdot s') \geqslant 0$. Donc, chaque terme s de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(x \cdot y)$ satisfait $w(s) \geqslant 0$ et le résultat est démontré. ■

Exemple 4.31 Supposons $t = x \cdot y$ et $t' = (x \cdot x \cdot y) \cdot (y \cdot x) \cdot y$. Quelque soit le poids w' considéré, on a $w'(t) = w'(t')$:

$$\begin{aligned}
w'(t') &= p^2 w'_x + p^2(1-p)w'_x + p(1-p)^2 w'_y + p^2(1-p)w'_y + p(1-p)^2 w'_x + (1-p)^2 w'_y\\
&= p^2 w'_x + p(1-p)w'_x + p(1-p)w'_y + (1-p)^2 w'_y = pw'_x + (1-p)w'_y = w'(t).
\end{aligned}$$

Pourtant, la coupure de t' en 100 est le terme $(x \cdot x \cdot y) \cdot y$ et on a $w((x \cdot x \cdot y) \cdot y) = -1/4$. Donc, d'après le corollaire 4.30, le terme t' n'est pas LDI-équivalent à t.

Corollaire 4.32 *Soit t' une ¤-expansion d'un terme t. Soit α une adresse du squelette de t. Alors il existe une adresse α' dans $\mathrm{Skel}(t')$ telle que $\mathrm{cut}(t',\alpha')$ est une ¤-expansion du terme $\mathrm{cut}(t,\alpha)$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de regarder la deuxième moitié de la démonstration de la proposition 4.29. On y montre que si un terme t'' est une ¤-expansion de base d'un terme t' alors $\mathrm{cut}(t'',\alpha)$ est une ¤-expansion du terme $\mathrm{cut}(t',\alpha')$, pour une adresse α'. Le reste résulte par induction. ■

On a montré que chaque coupure d'un terme t' qui est ¤-équivalent à t appartient à $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$. On montre maintenant la direction opposée, c'est-à-dire que chaque terme de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$ est une coupure d'un terme ¤-équivalent à t.

Lemme 4.33 *Soit s dans $\mathrm{Cut}_{\mathrm{H}}(t)$. Alors il existe un terme t' H-équivalent à t dont s est une coupure.*

DÉMONSTRATION : On montre le résultat par induction sur la longueur de la décomposition du terme s comme un produit de coupures de t. Si s est une coupure d'un terme t' H-équivalent à t alors le fait est vrai. Supposons $s = s_1 \cdot s_2$ pour s_1 et s_2 deux coupures d'un terme s_3 qui satisfont hypothèse d'induction. Par cette hypothèse, il existe un terme t'' H-équivalent à t dont s_3 est une coupure. On a donc $s_2 \sqsubseteq_{\mathrm{H}} s_1 \sqsubseteq_{\mathrm{H}} s_3 \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t'' \overset{\mathrm{H}}{=} t$. D'après le lemme 4.25, il existe un terme s_1', LD-expansion du terme s_1, tel que le terme s_2 est un sous-terme à gauche du terme s_1'. D'après le lemme 4.25, il existe un terme s_3', LD-expansion du terme s_3, tel que le terme s_1' est un sous-terme à gauche du terme s_3'. D'après le lemme 4.25, il existe un terme t''', LD-expansion du terme t'', tel que le terme s_3' est un sous-terme à gauche du terme t'''. On a maintenant $s_2 \sqsubseteq s_1' \sqsubseteq s_3' \sqsubseteq t''' \overset{\mathrm{H}}{=} t$. Notons α l'adresse de sous-terme s_1' dans t''' et $\alpha\beta$ l'adresse de sous-terme s_2 dans t'''. Soit maintenant t' le terme obtenu par la I-expansion de base en l'adresse α. On a

$$\mathrm{cut}(t', \alpha 1 \beta) = \mathrm{cut}(t''', \alpha) \cdot \mathrm{cut}(t''', \alpha\beta) = s_1' \cdot s_2 \overset{\mathrm{H}}{=} s_1 \cdot s_2 = s.$$

On a évidemment $t' \overset{\mathrm{LDI}}{=} t$ et donc le résultat est montré pour H=LDI. Considérons H=LDLI. D'après la définition de $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$ et d'après le lemme 4.25, on a $s_1' \sqsubset t'''$. Alors on a $\alpha = 0^p$ pour un $p > 0$ et on sait que la I-expansion de base en l'adresse 0^p est la même chose que la LI-expansion en l'adresse 0^{p-1}. Par conséquent, le terme t' est LI-équivalent au terme t et cela finit la démonstration. ■

Proposition 4.34 *Les conditions suivantes sont équivalentes pour deux termes s et t :*
(i) on a $s \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t$;
(ii) il existe un terme t', avec $t \overset{\mathrm{H}}{=} t'$, et α, adresse de $\mathrm{Skel}(t')$ satisfaisant $\mathrm{cut}(t', \alpha) = s$;
(iii) on a $s \in \mathrm{Cut}(t)$;
(iv) on a $\mathrm{Cut}(s) \subseteq \mathrm{Cut}(t)$.

DÉMONSTRATION : $(i) \Rightarrow (ii)$ Il existe s' et t'' avec $s \overset{\mathrm{H}}{=} s'$, $t \overset{\mathrm{H}}{=} t''$ et $s' \sqsubseteq t'$. Le terme obtenu à partir de t' en remplaçant le sous-terme s' par le sous-terme s est H-équivalent à t. $(ii) \Rightarrow (i)$ résulte du lemme 4.25. $(ii) \Rightarrow (iii)$ résulte du lemme 4.29. $(iii) \Rightarrow (iv)$ résulte du lemme 4.29 et de la définition de $\mathrm{Cut}(t)$. $(iv) \Rightarrow (iii)$ est évident. ■

Exemple 4.35 Supposons $t = ((x \cdot y) \cdot y) \cdot x$ et $t' = (x \cdot y) \cdot ((y \cdot x) \cdot x)$. Larue [38] a montré que ces deux termes ne sont pas LDI-équivalents. On a $t = \mathrm{cut}(t', 100) \cdot \mathrm{cut}(t', 00)$ et donc, d'après la proposition 4.34, on a $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDI}} t'$. Maintenant on a $t \xrightarrow{\mathrm{LDI}} (((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot x$ (voir la figure 4.4) et par définition, le terme $(((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)$ appartient à l'ensemble $\mathrm{Cut}(t)$. Maintenant on a $(((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot x \xrightarrow{\mathrm{LDI}} ((((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot (((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y)) \cdot x$ (voir la figure 4.4) et par définition le terme $((((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)$ appartient à l'ensemble $\mathrm{Cut}(t)$. Puisque le dernier terme est une LDI-expansion du terme t' (voir la figure 4.5), on a $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDI}} t$, d'après la proposition 4.34. On donc voit que l'on ne peut pas montrer $t \overset{\mathrm{LDI}}{\neq} t'$ par comparaison de l'ensembles $\mathrm{Cut}(t)$ et $\mathrm{Cut}(t')$.

Considérons deux termes t et t' qui sont suspecté d'être H-équivalents. Si on trouve, par l'étude de l'ensemble $\mathrm{Cut}(t)$, que l'on n'a pas $t' \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t$, comme dans l'exemple 4.31, on

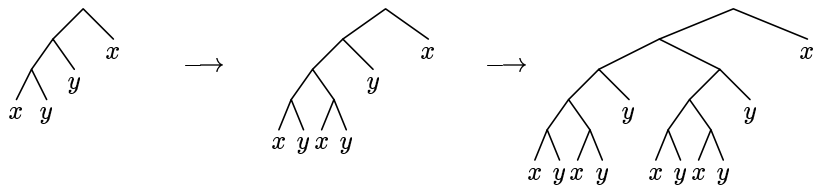


FIG. 4.4 – Des expansions du terme $((x \cdot y) \cdot y) \cdot x$

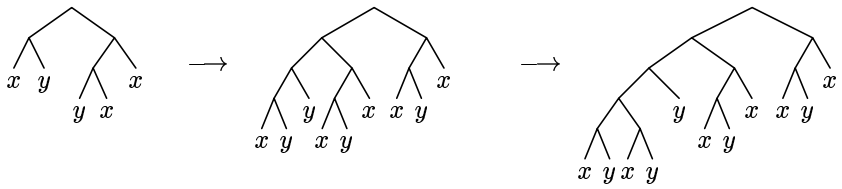


FIG. 4.5 – Des expansions du terme $(x \cdot y) \cdot ((y \cdot x) \cdot x)$

sait que ces deux termes ne sont pas $\mathbb{H}$-équivalents. Par contre, si on trouve que $t' \sqsubseteq_{\mathbb{H}} t$ est vrai, comme dans l'exemple 4.35, on peut, probablement résoudre le problème en énumerant la forme t-$\partial_{\mathbb{H}}$-normale qui est décrite dans la section suivante.

4.4 La forme ∂-normale

Dans cette section on donne une description des coupures du terme $\partial_{\mathbb{H}} t$ pour un terme t. On en déduit la définition d'une forme t_0-$\partial_{\mathbb{H}}$-normale du terme t, si le terme t est, à $\mathbb{H}$-près, un sous-terme à gauche itéré du terme t_0. Comme le nom sugère, deux termes t et t' satisfaisants $t \sqsubseteq_{\mathbb{H}} t_0$ et $t' \sqsubseteq_{\mathbb{H}} t'_0$ sont $\mathbb{H}$-équivalents si et seulement s'ils ont la même forme t_0-$\partial_{\mathbb{H}}$-normale. On ne considère pas l'identité LD et on s'intéresse dans cette section uniquement aux familles LDI et LDLI. Au début de la section on introduit certains résultats préparatoires. On commence par la forme des coupures d'une distribution uniforme.

Lemme 4.36 [12] *Supposons que t et t_0 sont deux termes. Le contour de $t_0 * t$ consiste en :*
- toutes les adresses $\alpha 0 \alpha_0$ avec $\alpha_0 \in \mathrm{Out}(t_0)$ et $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$.
- toutes les adresses $\alpha 1$ avec $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$.
Supposons $\alpha_0 \in \mathrm{Out}(t_0)$, $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$ et $\mathrm{cut}(t, \alpha) = s_1 \cdot \cdots \cdot s_p \cdot x$ avec x une variable. Alors on a

$$\mathrm{cut}(t_0 * t, \alpha 0 \alpha_0) = (t_0 * s_1) \cdot \cdots \cdot (t_0 * s_p) \cdot \mathrm{cut}(t_0, \alpha_0),$$
$$\mathrm{cut}(t_0 * t, \alpha 1) = t_0 * \mathrm{cut}(t, \alpha).$$

Définition [12] : Supposons que α et β sont deux adresses avec $\alpha >_{\text{LR}} \beta$. On dit que α *couvre* β s'il existe une adresse γ et un entier positif q satisfaisant $\alpha = \gamma 1^q$ et $\gamma 0 \sqsubseteq \beta$. Autrement on dit que α *découvre* β et on écrit $\alpha \gg \beta$.

Par exemple, 1011 couvre 1001 et 1010 incouvre 00. La couverture et la découverture sont des ordres partiels. De plus, on a $\beta \gg \gamma$ si une adresse α couvre β et incouvre γ.

Définition : Soit t un terme et soient $\alpha_1 >_{\text{LR}} \alpha_2$ deux adresses de $\text{Out}(t)$. On définit $\nu_t^{\text{c}}(\alpha_1, \alpha_2)$ comme le nombre d'adresses γ de $\text{Out}(t)$ couvertes par α_1 et strictement plus grandes que α_2. On définit $\nu_t^{\text{u}}(\alpha_1, \alpha_2)$ comme le nombre d'adresses γ de $\text{Out}(t)$ satisfaisant $\alpha_1 \gg \gamma > \alpha_2$. On définit $\nu_t(\alpha_1, \alpha_2)$ comme le nombre d'adresses γ de $\text{Out}(t)$ strictement entre α_1 et α_2. À cette occasion, on introduit deux adresses virtuelles $\leftarrow, \rightarrow$, satisfaisant $\leftarrow \ll \gamma \ll \rightarrow$ pour chaque γ dans $\text{Out}(t)$.

On voit que l'on a $\nu_t(\alpha_1, \alpha_2) = \nu_t^{\text{c}}(\alpha_1, \alpha_2) + \nu_t^{\text{u}}(\alpha_1, \alpha_2)$, pour chaque paire $\alpha_1 >_{\text{LR}} \alpha_2$. On voit aussi que $\nu_t^{\text{c}}(\alpha_1, \leftarrow)$ est le nombre d'adresses dans $\text{Out}(t)$ couvertes par α_1, que $\nu_t^{\text{u}}(\alpha_1, \leftarrow)$ est le nombre d'adresses dans $\text{Out}(t)$ incouvertes par α_1, que $\nu_t^{\text{u}}(\rightarrow, \alpha_2)$ est le nombre d'adresses dans $\text{Out}(t)$ strictement plus grandes que α_2 et que $\nu_t^{\text{c}}(\rightarrow, \alpha_2)$ est égal à 0.

Notre premier but est de décrire les coupures du terme $\partial_{\text{H}} t$ pour chaque terme t. On commence par la famille LDI et on montre que chaque coupure de $\partial_{\text{LDI}} t$ correspond à une suite qui s'appelle une cascade.

Définition : Soit t un terme. Une *cascade* dans t est une suite $\vec{\alpha}$ de couples $((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ telle que $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ est une suite strictement décroissante d'adresses de $\text{Out}(t)$, et $a_1, \ldots, a_p$ sont des coefficients 0 ou 1, pour lesquels $a_i = 0$ entraîne $i = p$ ou $\alpha_i \gg \alpha_{i+1}$. La cascade *finale* de t est la cascade $((1^*, 0))$. On écrit $\text{Casc}(t)$ pour l'ensemble de toutes les cascades dans t.
On définit l'ordre lexicographique $<_{\text{lex}}$, pour deux cascades $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ et $\vec{\beta} = ((\beta_1, b_1), \ldots, (\beta_q, b_q))$ comme suit :

$$\vec{\alpha} <_{\text{lex}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i < \beta_i \text{ et } \alpha_j = \beta_j \text{ et } a_j = b_j, & \text{pour un } i \leqslant p \text{ et tous } j < i, \\ \alpha_i = \beta_i \text{ et } a_i > b_i \text{ et } \alpha_j = \beta_j \text{ et } a_j = b_j, & \text{pour un } i \leqslant p \text{ et tous } j < i, \\ p < q \text{ et } \alpha_j = \beta_j \text{ et } a_j = b_j, & \text{pour tous } j \leqslant p, \end{cases} \tag{4.19}$$

Exemple 4.37 Soit t le terme $(x \cdot y) \cdot z$. Ordonné par l'ordre $<_{\text{lex}}$, toutes les cascades de t sont : $((00,1))$, $((00,0))$, $((01,1))$, $((01,1),(00,1))$, $((01,1),(00,0))$, $((01,0))$, $((1,1))$, $((1,1),(00,1))$, $((1,1),(00,0))$, $((1,1),(01,1))$, $((1,1),(01,1),(00,1))$, $((1,1),(01,1),(00,0))$, $((1,1),(01,0))$ et $((1,0))$. La suite $((01,0),(00,1))$ n'est pas une cascade parce que 01 couvre 00.

On définit maintenant l'application π_t de $\text{Casc}(t)$ vers $\mathbf{A}$. On montrera plus bas que π_t décrit une correspondance bijective entre les cascades de t et le contour de $\partial_{\text{LDI}} t$.

Définition : Soient t un terme et $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ une cascade de t.
(i) On définit, pour chaque $1 \leqslant i < p$,

$$\rho_i(t, \vec{\alpha}) = 2 \cdot (\nu_t^{\mathrm{u}}(\alpha_i, \alpha_{i+1}) + a_i \nu_t^{\mathrm{c}}(\alpha_i, \alpha_{i+1})) + a_{i+1}. \tag{4.20}$$

On étend la définition aussi pour $i = 0$ et pour $i = p$ en posant $\alpha_0 = \rightarrow$, $\alpha_{p+1} = \leftarrow$ et $a_0 = a_{p+1} = 0$.
(ii) On définit, pour $\vec{\alpha}$ non finale,

$$\pi_t(\vec{\alpha}) = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}(10^{\rho_1(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_2(t,\vec{\alpha})}) \cdots (10^{\rho_{p-1}(t,\vec{\alpha})})01^{|\alpha_p|_1+1-a_p}, \tag{4.21}$$

$$\pi_t^+(\vec{\alpha}) = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}(10^{\rho_1(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_2(t,\vec{\alpha})}) \cdots (10^{\rho_{p-1}(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_p(t,\vec{\alpha})}), \tag{4.22}$$

et, pour $\vec{\alpha}$ finale, on définit $\pi_t(\vec{\alpha}) = 1^{|\alpha_1|+1}$.

On peut remarquer que $\pi_t(\vec{\alpha})$ pour $\vec{\alpha}$ finale est en fait aussi définie par (4.21) : on a

$$\pi_t(\vec{\alpha}) = 1^{|\alpha_1|+1} = 0^{-1}01^{|\alpha_1|_1+1-0} = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}01^{|\alpha_1|_1+1-a_1}.$$

On est enfin prêt à décrire la forme des coupures du terme $\partial_{\mathrm{LDI}} t$.

Proposition 4.38 *(i) Pour chaque terme t, l'application π_t est une bijection monotone de l'ensemble* $\mathrm{Casc}(t)$ *ordonné par $>_{\mathrm{lex}}$ sur l'ensemble* $\mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDI}} t)$ *ordonné par $>_{\mathrm{LR}}$. Pour $\vec{\alpha}$ cascade non finale, le successeur immédiat de $\pi_t(\vec{\alpha})$ dans le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}} t$ est $\pi_t^+(\vec{\alpha})$.*
(ii) Supposons que $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ est une cascade de t. Alors on a :

$$\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t, \pi_t(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \mathrm{cut}(t, \alpha_p), \tag{4.23}$$

et, pour $\vec{\alpha}$ non-finale,

$$\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t, \pi_t^+(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \mathrm{cut}(t, \alpha_p) \cdot x, \tag{4.24}$$

où ∂_0 signifie ∂_{LDI}, ∂_1 signifie ∂_{LDLI} et x est une variable.

DÉMONSTRATION : On fixe d'abord une notation : pour $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p)$ cascade et γ adresse, on écrit $\gamma\vec{\alpha}$ pour $((\gamma\alpha_1, a_1), \ldots, (\gamma\alpha_p, a_p))$. Soit $\vec{\beta} = ((\beta_1, b_1), \ldots, (\beta_q, b_q))$ une autre cascade. On note $\vec{\alpha}^\frown\vec{\beta}$ la suite $((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p), (\beta_1, b_1), \ldots (\beta_q, b_q))$. Il est évident que $\gamma\vec{\alpha}$ est une cascade et que $\vec{\alpha}^\frown\vec{\beta}$ est une cascade si et seulement si on a soit $a_p = 1$ et $\alpha_p > \beta_1$ soit $a_p = 0$ et $\alpha_p \gg \beta_1$.

On montre le résultat par induction sur t. Lorsque t est une variable, il n'y a que deux cascades dans t, à savoir $((\varnothing), (1))$ et $((\varnothing), (0))$. L'application π_t les envoie sur 0 et 1 respectivement qui sont les deux adresses externes du terme $\partial_{\mathrm{LDI}} t$. Donc le résultat est vrai. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. Par définition, les cascades de t sont de trois types :
- $1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}$, avec $\vec{\beta}$ cascade de t_1 et $\vec{\gamma}$ cascade non finale de t_2 ;
- $1\vec{\gamma}$, avec $\vec{\gamma}$ cascade de t_2 ;
- $0\vec{\beta}$, avec $\vec{\beta}$ cascade de t_1.

Supposons d'abord que $\vec{\beta}$ est une cascade non-finale de t_1 et $\vec{\gamma}$ une cascade non-finale de t_2. Pour chaque α_2 dans $\mathrm{Out}(t_2)$ et α_1 dans $\mathrm{Out}(t_1)$ on a

$$\begin{aligned}\nu_t^{\mathrm{u}}(1\alpha_2, 0\alpha_1) &= \nu_{t_2}^{\mathrm{u}}(\alpha_2, \leftarrow) + \nu_{t_1}^{\mathrm{u}}(\rightarrow, \alpha_1),\\ \nu_t^{\mathrm{c}}(1\alpha_2, 0\alpha_1) &= \nu_{t_2}^{\mathrm{c}}(\alpha_2, \leftarrow) = \nu_{t_2}^{\mathrm{c}}(\alpha_2, \leftarrow) + \nu_{t_1}^{\mathrm{c}}(\rightarrow, \alpha_1),\end{aligned}$$

ce qui reste vrai même pour $\alpha_2 = \rightarrow$ ou $\alpha_1 = \leftarrow$. En utilisant la définition de π_t, on obtient

$$\pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}) = \pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta}), \qquad \pi_t^+(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}) = \pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}^+(\vec{\beta}),$$

où la deuxième égalité est vraie seulement pour $\vec{\beta}$ non finale. Avec une notation similaire on trouve

$$\begin{aligned}\pi_t(1\vec{\gamma}) &= \pi_{t_2}(\vec{\gamma})1, & \pi_t^+(1\vec{\gamma}) &= \pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})0^{2m_1},\\ \pi_t(0\vec{\beta}) &= 0^{2m_2}\pi_{t_1}(\vec{\beta}), & \pi_t^+(0\vec{\beta}) &= 0^{2m_2}\pi_{t_1}^+(\vec{\beta}),\end{aligned}$$

où m_e signifie $\nu_{t_e}(\leftarrow, \rightarrow)$.

Soit maintenant $((1^q), (0))$ la cascade finale de t_1. Alors, pour chaque $\vec{\gamma}$, une cascade non-finale de t_2, on obtient

$$\begin{gathered}\pi_t^+(1\vec{\gamma}\frown((01^q), (0))) = \pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})1, \qquad \pi_t^+(((01^q), (0))) = 0^{2m_2-1}1,\\ \pi_t((01^q), (0)) = 0^{2m_2}1^{q+1} = 0^{2m_2}\pi_{t_1}(((1^q), (0))).\end{gathered}$$

Enfin, soit $((1^q), (0))$ la cascade finale de t_2. Alors $((1^{q+1}), (0))$ est la cascade finale de t et on a

$$\pi_t(((1^{q+1}), (0))) = 1^{q+2} = \pi_{t_2}(((1^q), (0)))1.$$

On en déduit que l'image de l'application π_t consiste en toutes les suites $\pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta})$, pour $\vec{\beta}$ cascade de t_1 et $\vec{\gamma}$ cascade non-finale de t_2, completé par toutes les suites $\pi_{t_2}^+(\vec{\gamma})1$ avec $\vec{\gamma}$ cascade non finale de t_2, et toutes les suites $0^{2m_2}\pi_t(\vec{\beta})$ avec $\vec{\beta}$ cascade de t_1. L'hypothèse d'induction implique que l'ensemble de toutes les suites de la forme $\pi_{t_2}^+$ avec $\vec{\gamma}$ une cascade non finale est le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}}t_2$ privé de l'adresse 0^*, et que l'ensemble des suites sous de la forme $\pi_{t_1}(\vec{\beta})$ avec $\vec{\beta}$ cascade de t_1 forme le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}}t_1$. Alors, d'après le lemme 4.36, l'image de π_t est le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}}t_1 * \partial_{\mathrm{LDI}}t_2$, ce qui est $\partial_{\mathrm{LDI}}t$. Un argument semblable montre que l'image de π_t^+ est le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}}t$ privé l'adresse 0^*.

Par construction, on a $\pi_t(\vec{\alpha}) < \pi_t^+(\vec{\alpha})$ pour chaque cascade non finale de t. En plus, $\pi_t(\vec{\alpha})$ et $\pi_t^+(\vec{\alpha})$ ont la forme $\gamma 01^*$ et $\gamma 10^*$ respectivement. Alors aucune adresse β ne peut satisfaire $\pi_t(\vec{\alpha}) < \beta < \pi_t^+(\vec{\alpha})$. Cela montre que $\pi_t^+(\vec{\alpha})$ est le successeur immédiat de $\pi_t(\vec{\alpha})$ dans le contour de $\partial_{\mathrm{LDI}}t$.

Enfin, les relations suivantes sont vraies par induction :
- $\pi_t(0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}) < \pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta})$, pour $\vec{\beta}$ cascade de t_1 et $\vec{\gamma}$ cascade de t_2 ;
- $\pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}'\frown 0\vec{\beta}')$, pour $\vec{\beta}, \vec{\beta}'$ cascades de t_1 et $\vec{\gamma} <_{\mathrm{lex}} \vec{\gamma}'$ cascades de t_2 ;
- $\pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}')$, pour $\vec{\beta} <_{\mathrm{lex}} \vec{\beta}'$ cascades de t_1 et $\vec{\gamma}$ cascade de t_2.

L'application π_t est donc croissante puisque, par hypothèse d'induction, les applications π_{t_1} et π_{t_2} sont croissantes. Ceci complète la démonstration de (i).

(ii) Supposons maintenant que $\vec{\beta}$ est une cascade de t_1 et $\vec{\gamma}$ une cascade de t_2, soit $\vec{\beta} = ((\beta_1, \ldots, \beta_q), (b_1, \ldots, b_q))$ et $\vec{\gamma} = ((\gamma_1, \ldots, \gamma_r), (c_1, \ldots, c_r))$. Alors $\pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta})$, qui est $\pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta})$, appartient au contour de $\partial_{\text{LDI}}t$. Le lemme 4.36 donne

$$\begin{aligned}\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta})) &= \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta})) \\ &= (\partial_{\text{LDI}}t_1 * s_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * s_m) \cdot \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1, \pi_t(\vec{\beta})),\end{aligned}$$

où $\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_t(\vec{\gamma}))$ est supposé être $s_1 \cdot \cdots \cdot s_m \cdot x$ pour une variable x. Par hypothèse d'induction, on a $m = r$ et $s_k = \partial_{c_k} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$, pour $k \leqslant r$. Utilisant $\operatorname{cut}(t, 1\gamma_k) = t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$ et $\partial_{c_k} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_k) = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_k} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$, on trouve

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta})) = \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_r) \cdot \partial_{b_1} \operatorname{cut}(t, 0\beta_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{b_q} \operatorname{cut}(t, 0\beta_q),$$

ce qui est la formule (4.23). Le cas de $0\vec{\beta}$ seul est semblable.

Considérons maintenant le cas de $1\vec{\gamma}$, où $\vec{\gamma} = ((\gamma_1, \ldots, \gamma_r), (c_1, \ldots, c_r))$ est une cascade de t_2. Alors on a $\pi_t(1\vec{\gamma}) = \pi_t(\vec{\gamma})1$ et, d'après le lemme 4.36,

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma})) = \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})1) = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})).$$

Par hypothèse d'induction, on a $\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})) = \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r)$ et donc on trouve

$$\begin{aligned}\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma})) &= \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r)) \\ &= (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1)) \cdot \cdots \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r)) \\ &= (\partial_{c_1}(t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1))) \cdot \cdots \cdot (\partial_{c_r}(t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r))) \\ &= \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_1)) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_r)),\end{aligned}$$

ce qui donne la formule (4.23) de nouveau.

Puisque $\pi^+_t(\vec{\alpha})$ est le successeur de $\pi_t(\vec{\alpha})$ dans le contour de $\partial_{\text{LDI}}t$, la formule (4.24) en résulte en appliquant la proposition 4.28. ■

Ce résultat concernant les coupures de $\partial_{\text{LDI}}t$ nous permet d'établir immédiatement le résultat analogue pour $\partial_{\text{LDLI}}t$.

Définition : Soit t un terme et soit $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ une cascade de t. On dit que $\vec{\alpha}$ est une cascade *mineure* de t si on a $\vec{\alpha} \leqslant_{\text{lex}} ((1^*, 1))$. L'ensemble de toutes les cascades mineures de t est noté $\operatorname{casc}(t)$.

Proposition 4.39 (i) *Pour chaque terme t, l'application π_t est une bijection monotone de l'ensemble* $\operatorname{casc}(t)$*, ordonné par $>_{\text{lex}}$ sur l'ensemble* $\operatorname{Out}(\partial_{\text{LDLI}}t)$*, ordonné par $>_{\text{LR}}$.*
(ii) *Supposons que $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ est une cascade mineure de t. Alors on a :*

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDLI}}t, \pi_t(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \operatorname{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \operatorname{cut}(t, \alpha_p),$$

où ∂_0 signifie ∂_{LDI} et ∂_1 signifie ∂_{LDLI}.

DÉMONSTRATION : On a $\partial_{\text{LDI}}t = \partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDLI}}t$, d'après le lemme 4.6. Donc, si on prend une adresse α de $\text{Out}(\partial_{\text{LDLI}}t)$, l'adresse 0α appartient à $\text{Out}(\partial_{\text{LDI}}t)$ et on a $\text{cut}(\partial_{\text{LDLI}}t, \alpha) = \text{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, 0\alpha)$. Pour une cascade $\vec{\alpha}$ de t, l'adresse $\pi_t(\vec{\alpha})$ commence par 0 si et seulement si α est mineure. Le reste résulte de la proposition 4.38. ■

Exemple 4.40 Supposons $t = x \cdot (y \cdot z)$. Le terme $\partial_{\text{LDI}}t$ est représenté dans la figure 4.6. Considérons, par exemple, la cascade $\vec{\alpha} = ((01, 0), (0, 1))$. On a $\pi_t(\vec{\alpha}) = 0100$ et la coupure $\text{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(\vec{\alpha}))$ est $\partial_{\text{LDI}}(x \cdot y) \cdot \partial_{\text{LDLI}}(x)$. Considérons maintenant la cascade $\vec{\beta} = ((1, 1), (01, 0))$. On a $\pi_t(\vec{\beta}) = 1011$ et la coupure $\text{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(\vec{\beta}))$ est $\partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDI}}(x \cdot y)$.

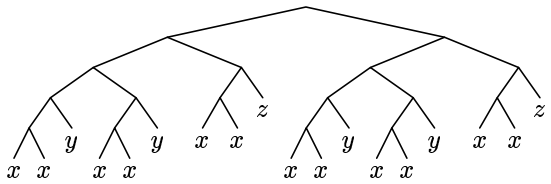


FIG. 4.6 – Le terme $\partial_{\text{LDI}}x \cdot (y \cdot z)$.

Lemme 4.41 *Pour chaque terme t et chaque k on a $\partial^k_{\text{LDLI}}t \sqsubseteq \partial^k_{\text{LDI}}t$.*

DÉMONSTRATION : On fait induction sur k. Le résultat est trivial pour $k = 0$. Supposons $k > 0$. D'après l'hypothèse d'induction il existe l tel que $\partial^{k-1}_{\text{LDLI}}t = \text{sub}(\partial^{k-1}_{\text{LDI}}t, 0^l)$ est vrai. Donc on a $\partial^{k-1}_{\text{LDLI}}t = \text{cut}(\partial^{k-1}_{\text{LDI}}t, 0^l1^*)$. On a $\pi_{\partial^{k-1}_{\text{LDI}}t}((0^l1^*, 1)) = 0^{l'}1^*$ pour un certain l'. Donc on a $\text{cut}(\partial^k_{\text{LDI}}t, 0^{l'}1^*) = \partial_{\text{LDLI}}\,\text{cut}(\partial^{k-1}_{\text{LDI}}t, 0^l1^*) = \partial^k_{\text{LDLI}}t$ et le terme $\partial^k_{\text{LDLI}}t$ est un sous-terme à gauche du terme $\partial^k_{\text{LDI}}t$. ■

Maintenant, quand on sait exprimer les coupures de $\partial_{\text{¤}}t$ en fonction de coupures de t, on peut définir une forme t_0-$\partial_{\text{¤}}$-normale :

Définition : Soit t_0 un terme. Pour $k \geqslant 0$, on dit qu'un terme t est un *terme t_0-$\partial_{\text{¤}}$-normal de degré k* si t est la coupure de $\partial^k_{\text{¤}}t_0$ en une adresse α et aucune coupure de $\partial^k_{\text{¤}}t_0$ en une adresse $\beta <_{\text{LR}} \alpha$ n'est ¤-équivalente à t. De plus, pour $k > 0$, on demande qu'aucune coupure de $\partial^{k-1}_{\text{¤}}t$ ne soit ¤-équivalente à t.

Exemple 4.42 Soit $t_0 = x \cdot (y \cdot z)$. Les termes t_0-∂_{LDI}-normaux de degré 0 sont x, $x \cdot y$ et $x \cdot (y \cdot z)$. Les termes t_0-∂_{LDI}-normaux de degré 1 sont $((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$, $\partial_{\text{LDLI}}t_0 \cdot x$, $\partial_{\text{LDLI}}t_0 \cdot (x \cdot x) \cdot y$ et $\partial_{\text{LDLI}}t_0 \cdot ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$.

On obtient immédiatement l'unicité de la forme ∂-normale :

Proposition 4.43 *Soit t_0 un terme. Alors chaque terme t avec $t \sqsubseteq_{\text{¤}} t_0$ est ¤-équivalent à unique terme t_0-$\partial_{\text{¤}}$-normal.*

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 4.34, il existe un terme t'_0, $\square$-équivalent à t_0, tel que t est une coupure de t'_0. D'après la proposition 4.12, il existe k tel que le terme $\partial^k_\square t_0$ est une expansion de t'_0. Enfin, d'après le corollaire 4.32, il existe une coupure du terme $\partial^k_\square t_0$ qui est $\square$-équivalente au terme t. Par conséquent, il existe un terme t_0-$\partial_\square$-normal qui est $\square$-équivalent à t_0 et son unicité est évidente. ■

Dans le cas de LD, aucune deux coupures du terme $\partial_{\text{LD}} t$ pour un t ne sont LD-équivalentes, ce qui n'est pas vrai dans le cas de LDI : Considérons $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ et $\vec{\alpha}' = ((\alpha_1, a'_1), \ldots, (\alpha_p, a'_p))$ cascades d'un terme t_0 ; ces cascades diffèrent uniquement par des coefficients. La coupure de $\partial_{\text{LDI}} t_0$ en $\pi(\vec{\alpha})$ est LDI-équivalente à la coupure en l'adresse $\pi(\vec{\alpha}')$. Par conséquent, la condition de minimalité de l'adresse de coupure dans la définition d'un terme t_0-$\partial_\square$-normal est nécessaire. Malheureusement, on peut aussi obtenir des coupures LDI-équivalentes à partir de cascades dont les suites d'adresses ne sont pas égales : soit $t_0 = (x \cdot y) \cdot x$ et soient $\vec{\alpha} = ((01, 1), (00, 1))$ et $\vec{\beta} = ((1, 1))$. Alors on a $\text{cut}(\partial_{\text{LDI}} t_0, \pi(\vec{\alpha})) = ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$ et cette coupure est LDLI-équivalente au terme t_0 et donc aussi à $\text{cut}(\partial_{\text{LDI}} t_0, \pi(\vec{\beta}))$. On ne peut pas donc dire que les coupures $\square$-équivalentes proviennent de la même origine. Cependant il est possible que les coupures $\square$-équivalents de $\partial^k_\square t_0$ aient toutes quelque chose en commun :

Conjecture 4.44 *Soient t_0 un terme et k un entier. Alors chaque coupure t du terme $\partial^k_\square t_0$ est une $\square$-expansion du terme t_0-$\partial_\square$-normal qui est $\square$-équivalent à t.*

La proposition 4.43 dit que chaque terme t satisfaisant $t \sqsubseteq_\square t_0$ est équivalent à un terme t_0-$\partial_\square$-normal. Mais elle n'est pas effective dans le sens qu'elle ne donne pas un moyen de trouver le terme t_0-$\partial_\square$-normal en question. Le moyen pourtant existe si la conjecture 4.44 est vraie :

Proposition 4.45 *Soient t et t_0 deux termes satisfaisant $t \sqsubseteq_\square t_0$. Si la conjecture 4.44 est vraie, alors il existe un algorithme qui trouve le terme t_0-$\partial_\square$-normal qui est $\square$-équivalent à t.*

DÉMONSTRATION : D'après ce qui a été dit dans la démonstration de la proposition 4.43, il existe k tel qu'une coupure de $\partial^k_\square t_0$ est une $\square$-expansion du terme t. On sait décider si un terme t' est une $\square$-expansion du terme t. Alors on parcourt tous les k et toutes les coupures des termes $\partial^k_\square t_0$ jusqu'au moment où on trouve un k et une coupure t' du terme $\partial^k_\square t_0$ qui est une $\square$-expansion du terme t. Maintenant, le terme t' est un candidat à la t_0-$\partial_\square$-normalité.

Soit t' une coupure d'une puissance $\partial^k_\square t_0$ en une adresse α qui est candidat à la t_0-$\partial_\square$-normalité. D'après la conjecture 4.44, il suffit de vérifier que toutes les coupures du terme $\partial^k_\square t_0$ en les adresses β avec $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ ainsi que toutes les coupures des termes $\partial^l_\square t_0$ avec $l < k$ ne peuvent pas être $\square$-expansées en le terme t'. Si c'est vrai, alors le terme t' est t_0-$\partial_\square$-normal. Si on trouve un terme t'' avec $t'' \xrightarrow{\square} t'$, alors le terme t'' est un nouveau candidat à la t_0-$\partial_\square$-normalité. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de coupures à vérifier, l'algorithme doit trouver le terme t_0-$\partial_\square$-normal qui est $\square$-équivalent au terme t. ■

Si deux termes t et t' satisfont $t \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t_0$ et $t' \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t_0$, pour un terme t_0, alors ils ont la même forme normale. Si la conjecture 4.44 est vraie, alors on peut trouver par un algorithme ces formes normales. Le point important est donc de savoir trouver un tel élément t_0 et de savoir montrer $t' \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t_0$. La première question n'est pas si compliquée, on peut prendre, par exemple, $t_0 = t$ et on a immédiatement $t \sqsubseteq_{\mathrm{H}} t_0$. Pour résoudre la deuxième, la proposition 4.34 peut aider comme dans l'exemple 4.35 mais un algorithme général n'est pas connu pour l'instant.

Chapitre 5

Monoïdes de géométrie

Dans cette section on étudie les monoïdes de géométrie, une approche qui a permis de résoudre le problème de mots dans le cas de LD (voir [12]). Les identités de distributivité à gauche et d'idempotence à gauche sont associées ici à des opérateurs qui spécifient quelle identité s'applique et sur quel sous-terme. Ces opérateurs peuvent se composer naturellement et on en obtient un monoïde appelé le monoïde de géométrie. On étudie les monoïdes de géométrie pour LDI et pour LDLI, et on décrit certaines relations qui sont vraies dans ces monoïdes. Ensuite on définit les monoïdes syntaxiques comme les monoïdes qui satisfont les relations de base des monoïdes de géométrie. On montre que ces monoïdes satisfont toutes les propriétés des monoïdes de géométrie et en plus que le monoïde syntaxique de LDLI est simplifiable à gauche et que sa divisibilité à gauche forme un treillis.

Dans la section 1, on définit les LDI-opérateurs et on établit certains résultats de base les concernant. Dans la section 2, on établit une liste de relations vraies dans les monoïdes de géométrie de LDI et LDLI. Ces résultats sont utilisés dans la section 3 pour définir les monoïdes syntaxiques et montrer leur propriétés. Dans la section 4, on étudie le monoïde syntaxique de LDLI.

5.1 LDI-opérateurs

On introduit dans cette section des opérateurs qui correspondent aux suites d'applications d'identités LD et I. Ensuite, on établit des résultats préparatoires concernant les monoïdes engendrés par ces opérateurs. On suit la méthode utilisée dans [12] pour les LD-opérateurs.

On rappelle que T_X désigne l'ensemble de tous les termes avec des variables dans X. On définit d'abord les opérateurs qui correspondent aux expansions de base.

Définition : Pour chaque ensemble X et chaque adresse α, on définit $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ (respectivement $\mathrm{I}_{\alpha,X}$) comme la fonction partielle de T_X vers T_X qui envoie chaque terme t sur son

LD-expansion de base (son I-expansion de base) en l'adresse α, si elle existe.

L'opérateur $\mathrm{I}_{\alpha,X}$ agit sur un terme t si et seulement si α appartient au squelette de t ; dans ce cas-là, le terme $t \bullet \mathrm{I}_{\alpha,X}$ est obtenu à partir de t en remplaçant le sous-terme $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ par le terme $\mathrm{sub}(t,\alpha)\cdot\mathrm{sub}(t,\alpha)$. L'opérateur $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ agit sur un terme t si et seulement si le sous-terme $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ est défini et il est sous la forme $t_1\cdot(t_2\cdot t_3)$. Dans ce cas-là, le terme $t \bullet \mathrm{D}_{\alpha,X}$ est obtenu à partir de t en remplaçant le sous-terme $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ par le terme $(t_1\cdot t_2)\cdot(t_1\cdot t_3)$. Si l'ensemble X est une partie d'un ensemble X', alors chaque opérateur $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ est la restriction de l'opérateur $\mathrm{D}_{\alpha,X'}$ sur l'ensemble T_X. On voit donc que, pour un terme t, l'image d'un opérateur $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ ne dépend pas de l'ensemble X et c'est pourquoi on n'écrit pas l'indice X dans les cas où il ne joue aucun rôle.

Exemple 5.1 Considérons $t = x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$ (voir la figure 5.1). Ce terme appartient au domaine des opérateurs $\mathrm{D}_\varnothing$, D_1, $\mathrm{I}_\varnothing$, I_0, I_1, I_{10}, I_{11}, I_{110} et I_{111}.

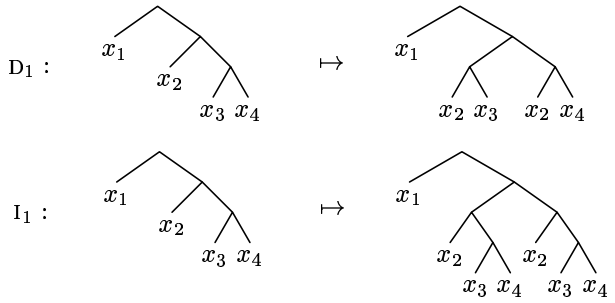


FIG. 5.1 – Les opérateurs D_1 et I_1 et leurs actions sur le terme $x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4$.

On n'a pas défini ce qu'est un LI-opérateur. En fait, on n'en a pas besoin si on remarque qu'une LI-expansion de base en une adresse α la I-expansion de base en l'adresse $\alpha 0$.

Définition : Soient $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$ et $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ deux copies disjointes de l'ensemble d'adresses $\mathbf{A}$. On note $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$ l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}\cup\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ et, pour chaque α de $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$, on définit DI_α soit comme D_α si α appartient à $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$, soit comme I_α si α appartient à $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$. On note aussi $\mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$ le sous-ensemble de $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ défini comme $\{\alpha\in\mathbf{A}_{\mathrm{I}};\ \exists\gamma : \alpha=\gamma 0\}$ et on note $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}$ l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}\cup\mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$.

Le lemme suivant résulte immédiatement de la définition des opérateurs :

Lemme 5.2 *Pour chaque adresse α de $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$, l'opérateur DI_α est une application partielle injective vers T_X ; son inverse est l'opérateur DI_α^{-1} défini comme DI_α en échangeant les rôles de $t_1(t_2\cdot t_3)$ et $(t_1\cdot t_2)\cdot(t_1\cdot t_3)$, respectivement t_1 et $t_1\cdot t_1$.*

On utilise de nouveau le symbole ¤ pour désigner une des familles LD, LDI ou LDLI.

Définition : Pour X ensemble non vide, le *monoïde de géométrie* de $\mathbb{H}$ relatif à X est le monoïde $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X}$ engendré par les opérateurs $\mathrm{DI}^{\pm 1}_{\alpha,X}$ avec α dans $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$ en utilisant la composition. De la façon analogue, le *monoïde positif de géométrie* est le monoïde $\mathcal{G}^{+}_{\mathbb{H},X}$ engendré par les opérateurs $\mathrm{DI}_{\alpha,X}$ avec α de $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$.

Le monoïde $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X}$ n'est pas un groupe, parce que l'application $\mathrm{DI}^{-1}_{\alpha,X} \circ \mathrm{DI}_{\alpha,X}$ n'est pas l'application identique sur T_X en général, elle est seulement l'application identique sur le domaine de $\mathrm{DI}_{\alpha,X}$.

Une bijection entre X et X' engendre un isomorphisme entre les monoïdes $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X}$ et $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X'}$ donc le monoïde $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X}$ dépend seulement de la cardinalité de X. On peut montrer que $\mathcal{G}_{\mathbb{H},X}$ ne dépend pas non plus de la cardinalité de X mais on ne le fait pas ici parce que la démonstration est la même que celle pour le monoïde de géométrie de LD dans [12]. En sachant cela, on n'utilise plus l'indice X dans DI_α, $\mathcal{G}_{\mathbb{H}}$ et $\mathcal{G}^{+}_{\mathbb{H}}$.

Par définition, les éléments de $\mathcal{G}^{+}_{\mathbb{H}}$ sont des produits finis d'opérateurs DI_α, donc ils sont de la forme

$$\mathrm{DI}_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \mathrm{DI}_{\alpha_2} \circ \mathrm{DI}_{\alpha_1} .$$

De tels éléments peuvent être exprimés par des suites finis d'adresses de $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$, c'est-à-dire par des mots sur $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$. On note $\mathbf{A}^{*}_{\mathbb{H}}$ l'ensemble de ces mots. Le produit de deux mots u et v est la concaténation de ces mots, notée uv ou $u \cdot v$. Puisqu'on travaille avec des mots dont les lettres sont des adresses, il est nécessaire d'écrire le point pour éviter l'ambiguïté : la suite $0 \cdot 10 \cdot \varnothing$ est un mot de longueur 3 sur $\mathbf{A}^*$ On écrit le symbole ε pour le mot vide.

On considère que les opérateurs DI_α agissent à droite, c'est-à-dire on compose les opérateurs de gauche à droite. Donc, pour ne pas confondre la composition à droite avec la composition $\circ$ dont la direction est de droite à gauche, on utilise le symbole $\bullet$.

Définition : Pour $\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_p$ de $\mathbf{A}^{*}_{\mathbb{H}}$, l'opérateur DI_u est défini comme $\mathrm{DI}_{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \mathrm{DI}_{\alpha_p}$, c'est-à-dire comme $\mathrm{DI}_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \mathrm{DI}_{\alpha_1}$. L'opérateur DI_ε est défini comme l'identité.

Considérons maintenant le monoïde $\mathcal{G}_{\mathbb{H}}$. Ses éléments sont sous la forme

$$\mathrm{DI}^{e1}_{\alpha_1} \bullet \mathrm{DI}^{e_2}_{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet \mathrm{DI}^{e_p}_{\alpha_p}$$

avec α_i dans $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$ et $e_i = \pm 1$, pour i entre 1 et p. Pour spécifier un tel produit, il est naturel d'introduire l'inverse formel α^{-1} d'une adresse α de $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$. On note $\mathbf{A}^{-1}_{\mathbb{H}}$ l'ensemble des inverses formels des adresses de $\mathbf{A}_{\mathbb{H}}$, et $\mathbf{A}^{\pm 1}_{\mathbb{H}}$ l'ensemble $\mathbf{A}_{\mathbb{H}} \cup \mathbf{A}^{-1}_{\mathbb{H}}$.

Définition : Pour $w = \alpha_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_p^{e_p}$ dans $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{\mathbb{H}})^*$, l'opérateur DI_w est défini comme le produit $\mathrm{DI}^{e_1}_{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \mathrm{DI}^{e_p}_{\alpha_p}$.

Les éléments de $\mathbf{A}^{*}_{\mathbb{H}}$ sont appelés les mots positifs et les éléments de $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{\mathbb{H}})^*$ sont appelé les mots, tout simplement.

Définition : Pour un terme t et un mot w de $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{\mathbb{H}})^*$, le terme $t \bullet w$ est défini comme l'image de t par l'application DI_w, s'il existe.

Exemple 5.3 Considérons $\mathrm{DI}_w = \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{01}^{-1}$. Il est facile à voir que le terme $x \cdot y \cdot z$ appartient au domaine de DI_w et que l'image de $x \cdot y \cdot z$ par DI_w est le terme $(x \cdot y) \cdot x \cdot z$, comme on voit dans la figure 5.2.

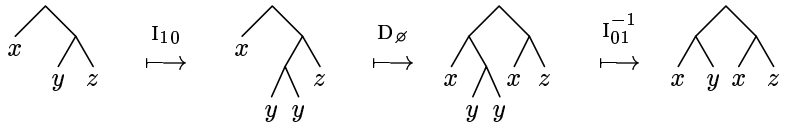


FIG. 5.2 – Action de l'opérateur $\mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{01}^{-1}$ sur le terme $x \cdot y \cdot z$.

Par construction, on a la relation $t \bullet w \overset{\text{¤}}{=} t$, pour chaque mot w de $(\mathbf{A}_{\text{¤}}^{\pm 1})^*$, si t appartient au domaine de DI_w. On a aussi la relation $t \bullet u \overset{\text{¤}}{\to} t$ pour chaque mot positif u de $\mathbf{A}_{\text{¤}}^*$, si t appartient au domaine de DI_u. En fait, ces implications sont des équivalences :

Proposition 5.4 *Soient t et t' deux termes de T_X.*
(i) Les termes t et t' sont ¤-équivalents si et seulement si un opérateur de $\mathcal{G}_{\text{¤}}$ envoie t vers t', c'est-à-dire si on a $t' = t \bullet w$ pour un mot w sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}^{\pm 1}$.
(ii) Le terme t est une ¤-expansion du terme t si et seulement si un opérateur de $\mathcal{G}_{\text{¤}}^+$ envoie t vers t', c'est-à-dire si on a $t' = t \bullet u$ pour un mot u sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}$.

DÉMONSTRATION : Par définition, les ¤-expansions de base correspondent à l'action des opérateurs DI_α avec α dans $\mathbf{A}_{\text{¤}}$. Les k-¤-expansions consistent à faire k ¤-expansions de base consécutives et donc elles correspondent aux mots de longueur k sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}$. De même, deux termes t et t' sont ¤-équivalents si et seulement s'il existe une suite $t = t_0, \ldots, t_k = t'$ de termes telle que deux termes voisins sont l'un une ¤-expansion de base de l'autre. Cette suite corresponde à un mot w de longueur k sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}^{\pm 1}$ et l'opérateur DI_w envoie t sur t'. ■

D'après la proposition 5.4, étudier la relation $\overset{\text{¤}}{=}$ sur T_X est équivalent à étudier le monoïde $\mathcal{G}_{\text{¤},X}$ et étudier la relation $\overset{\text{I}}{\to}$ sur T_X est équivalent à étudier le monoïde $\mathcal{G}_{\text{¤},X}^+$. L'avantage de l'approche monoïdale est qu'elle permet une analyse plus précise.

Dans la suite, on décrit le domaine des opérateurs. Ces résultats seront utilisés dans la deuxième section pour démontrer des relations dans les monoïdes de géométrie. On ne donne la preuve de ces résultats parce qu'elle est semblable à celle des résultats analogues présentés dans [12].

Définition : On dit qu'un terme t de $T_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$ est *canonique* si les variables de t, ordonnées par ses premières apparitions à gauche, sont $x_1, x_2, \ldots$. On dit qu'un terme t est *injectif* si aucune variable n'apparaît deux fois dans t. On dit qu'une substitution est *injective* si, pour chaque variable z, le terme $h(z)$ est injectif et en plus, les variables qui apparaissent dans $h(z)$ sont disjointes de celles qui apparaissent dans $h(y)$ pour $y \neq z$.

On voit que, pour chaque terme t, il existe exactement un terme injectif et canonique qui a le même squelette que t.

Définition : Soit (s, s') une paire de termes de T_X. Pour chaque substitution h, on dit que la paire (s^h, s'^h) est une *instance* de la paire (s, s').

Lemme 5.5 *Pour chaque adresse α de $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$, il existe un couple (t^L_α, t^R_α) de termes canoniques de T_X telle que l'opérateur DI_α envoie t sur t' si et seulement si le couple (t, t') est une instance du couple (t^L_α, t^R_α). De plus, le terme t^L_α est injectif.*

Le résultat précédent implique qu'un terme appartient au domaine de DI_α si et seulement si le squelette de t est assez grand :

Lemme 5.6 *(i) Le terme t appartient au domaine de D_α si et seulement si l'adresse $\alpha 10$ appartient au squelette de t.*
(ii) Le terme t appartient au domaine de I_α si et seulement si l'adresse α appartient au squelette de t.
(iii) Le terme t appartient au domaine de D_α^{-1} si et seulement si les adresses $\alpha 10$ et $\alpha 00$ appartiennent au squelette de t et on a $\text{sub}(t, \alpha 00) = \text{sub}(t, \alpha 10)$.
(iv) Le terme t appartient au domaine de I_α^{-1} si et seulement si l'adresse $\alpha 1$ appartient au squelette de t et on a $\text{sub}(t, \alpha 0) = \text{sub}(t, \alpha 1)$.

Proposition 5.7 *(i) Pour chaque mot w sur $\mathbf{A}^{\pm 1}_{\text{LDI}}$, soit l'opérateur DI_w est vide, soit il existe un couple unique (t^L_w, t^R_w) de termes canoniques de T_X telle que l'opérateur DI_w envoie un terme t sur un terme t' si et seulement si le couple (t, t') est une instance de (t^L_w, t^R_w).*
(ii) Pour chaque mot u sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$, l'opérateur DI_u est non vide et le terme t^L_u est injectif; dans ce cas-là, un terme t appartient au domaine de l'opérateur DI_u si est seulement si le squelette de t est inclus dans le squelette de t^L_u.

Exemple 5.8 Il existe des LDI-opérateurs dont le domaine est vide. Par exemple, considérons l'opérateur $\text{I}_\varnothing \bullet \text{I}_1 \bullet \text{I}_\varnothing^{-1}$. L'opérateur $\text{I}_{\varnothing \cdot 1}$ envoie chaque terme t sur le terme $t \cdot t \cdot t$. D'après le lemme 5.6, le terme $t \cdot t \cdot t$ n'appartient pas au domaine de l'opérateur $\text{I}_\varnothing^{-1}$, parce que le sous-terme à gauche est différent du sous-terme à droite. Par conséquent, l'opérateur $\text{I}_{\varnothing \cdot 1 \cdot \varnothing^{-1}}$ est vide.

Exemple 5.9 Le couple (t^L_w, t^R_w) pour $\text{DI}_w = \text{D}_\varnothing \bullet \text{I}_0^{-1} \bullet \text{D}_1$ est présentée dans la figure 5.3. Une description, comment à trouver ces termes est donnée dans [12].

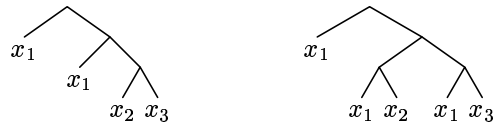


FIG. 5.3 – Le couple (t^L_w, t^R_w) pour $\text{DI}_w = \text{D}_\varnothing \bullet \text{I}_0^{-1} \bullet \text{D}_1$.

Le résultat précédent peut être généralisé pour le cas de plusieurs opérateurs.

Proposition 5.10 *Soient $w_1, \ldots, w_m$ des mots sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}^{\pm 1}$. Alors, l'intersection de domaines des opérateurs $\text{DI}_{w_1}, \ldots, \text{DI}_{w_m}$ soit est vide, soit est l'ensemble de tous les substitués d'un terme canonique unique $t^L_{w_1,\ldots,w_m}$. Si $w_1, \ldots, w_m$ sont des mots positifs, alors le deuxième cas apparaît et le terme $t^L_{w_1,\ldots,w_m}$ est injectif.*

5.2 Relations dans les monoïdes de géométrie

Dans cette section on étudie les relations dans les monoïdes de géométrie de LDI et de LDLI et on en trouve trois familles. Grâce aux relations déduit un rapport entre LDI-équivalence et LDLI-équivalence. Le démonstration resemblent beaucoup à celle pour LD mais on doit les faire ici parce que l'on ne sait pas *a priori* si les opérateurs I satisfont les même propriété comme les opérateurs D.

Définition : Pour w un mot sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}^{\pm 1}$ et γ une adresse de $\mathbf{A}$, on note $\text{sh}_\gamma(w)$, ou simplement γw, le *γ-décalage* de w défini comme le mot obtenu de w en remplaçant chaque adresse $\alpha^{\pm 1}$ par l'adresse $\gamma\alpha^{\pm 1}$.

Lemme 5.11 *Pour chaque α, $\text{DI}_w = \text{DI}_{w'}$ implique $\text{DI}_{\alpha w} = \text{DI}_{\alpha w'}$.*

DÉMONSTRATION : Une induction simple sur $\lg(w)$ montre que t appartient au domaine de $\text{DI}_{\alpha w}$ si et seulement si $\text{sub}(t, \alpha)$ appartient au domaine de DI_w. Dans ce cas-là, le terme $t \bullet \text{DI}_{\alpha w}$ et obtenu à partir de t en remplaçant le sous-terme $\text{sub}(t, \alpha)$ par son image par DI_w. ■

La première famille de relations dans $\mathcal{G}_{\text{H}}$ exprime que des opérateurs associés aux adresses orthogonales agissent indépendamment.

Proposition 5.12 *Soient α et β deux adresses orthogonales dans $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. Alors les opérateurs DI_α et DI_β commutent.*

DÉMONSTRATION : D'après le lemme 5.6, un terme t appartient au domaine de $\text{DI}_\alpha \bullet \text{DI}_\beta$ si et seulement si le squelette de $\text{sub}(t, \alpha)$ est assez grand et si le squelette de $\text{sub}(t, \beta)$ est assez grand. Ces deux sous-termes sont disjoints et donc on voit que l'image de t par $\text{DI}_\alpha \bullet \text{DI}_\beta$ de même que par $\text{DI}_\beta \bullet \text{DI}_\alpha$ consiste à remplacer le sous-terme $\text{sub}(t, \alpha)$ par le terme $\text{sub}(t, \alpha) \bullet \varnothing$ et le sous-terme $\text{sub}(t, \beta)$ par le terme $\text{sub}(t, \beta) \bullet \varnothing$. ■

Corollaire 5.13 *Soient w_1 et w_2 deux mots sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}^{\pm 1}$ tels que chaque adresse de w_1 est orthogonale à chaque adresse de w_2. Alors DI_{w_1} et DI_{w_2} commutent.*

Maintenant on définit, pour chaque mot positif u, les héritiers d'un ensemble B. Les héritiers sont des adresses qui sont obtenues comme des images de B par l'opérateur DI_u.

Définition : Soit B un ensemble d'adresses de $\mathbf{A}$, et soit u un mot sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. L'ensemble $\text{Heir}(B, u)$ de tous les *héritiers* des adresses de B par l'opérateur DI_u est défini

inductivement :
(*i*) $\mathrm{Heir}(B, u)$ existe si et seulement si $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ existe pour chaque β dans B, et, dans ce cas-là, on a $\mathrm{Heir}(B, u) = \bigcup_{\beta \in B} \mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$;
(*ii*) Pour chaque B on a $\mathrm{Heir}(B, \varepsilon) = B$;
(*iii*) Pour chaque α dans $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$, $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)$ est défini comme :

$$\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha) = \begin{cases} \{\beta\} & \text{pour } \beta \perp \alpha \text{ ou } \beta = \alpha 11\gamma, \\ \{\alpha 00\gamma, \alpha 10\gamma\} & \text{pour } \beta = \alpha 0\gamma, \\ \{\alpha 01\gamma\} & \text{pour } \beta = \alpha 10\gamma, \\ \text{n'est pas défini} & \text{pour } \beta \sqsubseteq \alpha 1, \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{LD}},$$

$$\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha) = \begin{cases} \{\beta\} & \text{pour } \beta \perp \alpha, \\ \{\alpha 0\gamma, \alpha 1\gamma\} & \text{pour } \beta = \alpha\gamma, \\ \text{n'est pas défini} & \text{pour } \beta \sqsubset \alpha. \end{cases} \qquad \text{pour } \alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}},$$

(*iv*) Pour $u = \alpha \cdot u_0$, on a $\mathrm{Heir}(B, u) = \mathrm{Heir}(\mathrm{Heir}(B, \alpha), u_0)$, s'il existe.

Le lecteur peut immédiatement vérifier le lemme suivant :

Lemme 5.14 *Soit u un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$ et soit β une adresse.*
(*i*) *L'ensemble* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *existe si et seulement si une adresse externe de t_u^L est un préfixe de β.*
(*ii*) *Si* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *est défini, alors* $\mathrm{Heir}(\{\beta\gamma\}, u)$ *est aussi défini, pour chaque adresse γ, et on a* $\mathrm{Heir}(\{\beta\gamma\}, u) = \{\beta'\gamma;\ \beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)\}$.
(*iii*) *Les éléments de chaque ensemble* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *sont deux à deux orthogonaux.*
(*iv*) *Supposons $t' = t \bullet u$ et β dans* $\mathrm{Skel}(t)$. *Si* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *est défini, alors on a* $\mathrm{sub}(t', \beta') = \mathrm{sub}(t, \beta)$ *pour chaque β' dans* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$.

Le résultat (*iv*) implique, pour une adresse externe α de t, que l'ensemble $\mathrm{Heir}(\{\alpha\}, u)$ sont des adresses externes de t'. En particulier, si t est injectif, l'ensemble $\mathrm{Heir}(\{\alpha\}, u)$ est l'ensemble de toutes les adresses externes α' de t' satisfaisantes $\mathrm{sub}(t', \alpha') = \mathrm{sub}(t, \alpha)$.

Exemple 5.15 Supposons $\mathrm{DI}_u = \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{10}$. Il est évident que le terme t_u^L est $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Alors, pour les adresses $\varnothing$ et 1, l'ensemble des héritiers n'est pas défini. Pour les autres adresses on a $\mathrm{Heir}(\{0\}, u) = \{00, 100, 101\}$, $\mathrm{Heir}(\{10\}, u) = \{01\}$ et $\mathrm{Heir}(\{11\}, u) = \{11\}$.

On est prêt a présenter la deuxième famille de relations, à savoir les relations liées à l'héritage.

Proposition 5.16 *Supposons que u est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$, que β est une adresse de $\mathbf{A}$ et que* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *est défini. Alors on a*

$$\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_u \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)} \mathrm{D}_{\beta'}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{I}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_u \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)} \mathrm{I}_{\beta'}. \tag{5.2}$$

DÉMONSTRATION : On montre le résultat par induction sur $\lg(u)$. Pour $u = \varepsilon$, le résultat est évident. Supposons maintenant $\mathrm{DI}_u = \mathrm{I}_\alpha$. L'ensemble $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ existe et donc α est soit orthogonale à β, soit un préfix de β. Le cas orthogonal est résolu par la proposition 5.12. Supposons $\alpha\gamma = \beta$. On veut montrer $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha = \mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$. Soit t un terme. Le terme t appartient au domaine de $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha$ si et seulement si l'adresse $\beta 10$ appartient au squelette de t. Le terme t appartient au domaine de $\mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$ si et seulement si les adresses $\alpha 0\gamma 10$ et $\alpha 1\gamma 10$ appartiennent au domaine de $t \bullet \alpha$ ce qui est vrai si et seulement si l'adresse $\alpha\gamma$ appartient au squelette de t. Donc, les opérateurs $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha$ et $\mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$ ont le même domaine et un calcul simple montre qu'ils sont égaux. L'argument est similaire pour l'opérateur D_β et pour $\alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$.

Supposons maintenant $\lg(u) \geqslant 2$, disons $u = \alpha \cdot u_0$. Par construction, l'hypothèse que $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ existe implique l'existence de $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)$ est de $\mathrm{Heir}(\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha), u_0)$ et que le second est égal à $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$. Par hypothèse d'induction, on a

$$\mathrm{DI}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_\alpha \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},\alpha)} \mathrm{DI}_{\beta'} \bullet \mathrm{DI}_{u_0} .$$

Par hypothèse d'induction de nouveau, on a, pour chaque β' de $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)$,

$$\mathrm{DI}_{\beta'} \bullet \mathrm{DI}_{u_0} = \mathrm{DI}_{u_0} \bullet \prod_{\beta'' \in \mathrm{Heir}(\{\beta'\},u)} \mathrm{DI}_{\beta''},$$

et on obtient

$$\mathrm{DI}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_\alpha \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},\alpha)} \prod_{\beta'' \in \mathrm{Heir}(\{\beta'\},u)} \mathrm{DI}_{\beta''} .$$

Maintenant, d'après le lemme 5.14 (*ii*), les adresses β' sont deux à deux orthogonales, les opérateurs associés commutent et le produit double dans la formule est égal à l'expression $\prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathrm{DI}_{\beta'}$. ■

On présente maintenant une famille d'égalités qui ne sont pas des relations du monoïde $\mathcal{G}_{\mathrm{LDI}}$, parce que les opérateurs ont des domaines différents. Néanmoins, les domaines diffèrent seulement très peu : chaque terme dont l'adresse α est externe, appartient au domaine de I_α et n'appartient pas au domaine de $\mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha$.

Proposition 5.17 *Soit t un terme et α une adresse. Si l'adresse $\alpha 1$ appartient au squelette de t, alors on a*

$$t \bullet \mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha = t \bullet \mathrm{I}_\alpha . \tag{5.3}$$

DÉMONSTRATION : L'adresse $\alpha 1$ appartient au squelette de t donc le sous-terme $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ est sous la forme $t_1 \cdot t_2$. Maintenant, l'opérateur $\mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha$ envoie ce sous-terme sur $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_2)$, de même que l'opérateur I_α. ■

Pour présenter une troisième famille de relations, il faut d'abord introduire un opérateur qui correspond à la distribution uniforme.

Définition [12] : Pour t un terme, on définit le mot δ_t sur $\mathbf{A}_{\text{LD}}$ par :

$$\delta_t = \begin{cases} \varepsilon & \text{lorsque } t \text{ est une variable,} \\ \varnothing \cdot 1\delta_{t_2} \cdot 0\delta_{t_1} & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{5.4}$$

Proposition 5.18 [12] *Soient t_0, t, t' termes. Alors le terme $t_0 \cdot t'$ appartient au domaine de D_{δ_t} si et seulement si le squelette de t' contient le squelette de t. L'opérateur D_{δ_t} envoie $t_0 \cdot t$ sur $t_0 * t$.*

Exemple 5.19 Il est montré dans [12] que le mot δ_t est le produit de toutes les adresses internes de t, ordonnées par $>$. Supposons $t = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$. Il y a quatre adresses internes dans t et le mot δ_t est égal à $\varnothing \cdot 1 \cdot 10 \cdot 101$.

La troisième famille de relations est liée au mot δ_t :

Proposition 5.20 *Soit u un mot sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ tel que DI_u envoie un terme t sur un terme t'. Si t n'est pas une variable, alors on a :*

$$\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{DI}_u = \text{DI}_{1u} \bullet \text{D}_{\delta_{t'}} . \tag{5.5}$$

DÉMONSTRATION : L'idée de la démonstration est la suivante : quand on applique l'opérateur DI_{δ_t} sur un terme $t_0 \cdot t$, on distribue le terme t_0 dans toutes le feuille de t. Quand on applique l'opérateur DI_u, on obtient le terme $t_0 * t'$. Et c'est la même chose comme appliquer d'abord DI_{1u} sur $t_0 \cdot t$ et après la distribution uniforme.

On montre la proposition par induction sur u. Le résultat est montré dans [12] pour u dans $\mathbf{A}^*_{\text{LD}}$, supposons donc u hors de $\mathbf{A}_{\text{LD}}$. Le résultat est évident pour $u = \varepsilon$, supposons $\lg(u) = 1$. Puisque u n'appartient pas à $\mathbf{A}^*_{\text{LD}}$, on a $u = \alpha$ pour une adresse α de $\mathbf{A}_{\text{I}}$. On utilise induction sur la longueur de α comme un mot sur $\{0, 1\}$. Supposons d'abord $\alpha = \varnothing$. On doit vérifier l'égalité $\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_1 \bullet \text{DI}_{\delta_{t'}}$, où $\text{I}_\varnothing$ envoie t sur t'. Par hypothèse, le terme t n'est pas une variable et donc on a

$$\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_\varnothing \bullet \text{D}_{0\delta_t} \bullet \text{D}_{1\delta_t} = \text{I}_1 \bullet \text{D}_\varnothing \bullet \text{D}_{1\delta_t} \bullet \text{D}_{0\delta_t} = \text{I}_1 \bullet \text{D}_{\delta_{t'}} .$$

Supposons maintenant $\alpha = e\beta$ avec $e = 0$ ou $e = 1$. On écrit $t = t_1 \cdot t_2$ et $t' = t'_1 \cdot t'_2$. Supposons d'abord $e = 1$. La relation $t' = t \bullet \alpha$ implique $t'_1 = t_1$ et $t'_2 = t_2 \bullet \beta$. Tous les deux opérateurs agissent sur termes dont squelettes contiennent l'adresse 11 donc le terme t_2 n'est pas une variable. On a, par hypothèse d'induction, $\text{D}_{\delta_{t_2}} \bullet \text{I}_\beta = \text{I}_{1\beta} \bullet \text{D}_{\delta_{t'_2}}$, et on obtient, d'après le lemme 5.11,

$$\text{D}_\varnothing \bullet \text{D}_{1\delta_{t_2}} \bullet \text{I}_{1\beta} = \text{D}_\varnothing \bullet \text{I}_{11\beta} \bullet \text{D}_{1\delta_{t'_2}} .$$

Lorsqu'on multiplie tous les deux cotés par $\text{D}_{0\delta_{t_1}}$, qui commute avec $\text{I}_{11\beta}$ par orthogonalité, en utilisant le résultat que $\text{D}_\varnothing$ et $\text{I}_{11\beta}$ commutent par la proposition 5.16, on obtient

$$\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{I}_{1\beta} = \text{D}_\varnothing \bullet \text{D}_{1\delta_{t_2}} \bullet \text{D}_{0\delta_{t_1}} \bullet \text{I}_{1\beta} = \text{I}_{11\beta} \bullet \text{D}_\varnothing \bullet \text{D}_{1\delta_{t'_2}} \bullet \text{D}_{0\delta_{t_1}} = \text{I}_{11\beta} \bullet \text{D}_{\delta_{t'}} .$$

L'argument est similaire pour $\alpha = 0\beta$.

Supposons maintenant $\lg(u) \geqslant 2$, disons $u = \alpha \cdot u_0$, avec α dans $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. Supposons que DI_α envoie t à t'' et, d'après l'hypothèse d'induction, on a

$$\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{DI}_\alpha \bullet \text{DI}_{u_0} = \text{DI}_{1\alpha} \bullet \text{D}_{\delta_{t''}} \bullet \text{D}_{u_0} = \text{DI}_{1\alpha} \bullet \text{DI}_{1u_0}\, \text{D}_{\delta_{t'}} = \text{DI}_{1u} \bullet \text{D}_{\delta_{t'}}\,.$$

■

Maintenant on va montrer que deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite.

Définition : Pour t un terme on définit la *hauteur à droite* comme :

$$\begin{aligned} &\text{rht}(t) = 0 && \text{lorsque } t \text{ est une variable,} \\ &\text{rht}(t) = \text{rht}(t_2) + 1 && \text{pour } t = t_1 \cdot t_2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

On voit que la hauteur à droite d'un terme t est la longueur de la branche à droite de t.

On présente d'abord trois résultats auxiliaires :

Lemme 5.21 *Pour chaque w sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}^{\pm 1}$ tel que le domaine de DI_w n'est pas vide, on a*

$$\text{DI}_w \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w} \bullet \text{DI}_{1w} \tag{5.7}$$

DÉMONSTRATION : Un terme t appartient au domaine de $\text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w} \bullet \text{DI}_{1w}$ si et seulement s'il appartient au domaine de DI_w. Ensuite, les deux opérateurs envoient t sur $(t \bullet w) \cdot (t \bullet w)$. ■

Lemme 5.22 *Pour chaque mot w sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}^{\pm 1}$ tel que le domaine de DI_w n'est pas vide, il existe un mot w' sur $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}^{\pm 1}$ et des nombres p et q tels que l'on ait*

$$\text{DI}_w = \text{I}_\varnothing^p \bullet \text{DI}_{w'} \bullet \text{I}_\varnothing^{-q}\,. \tag{5.8}$$

En particulier, le nombre p est plus petit que le nombre d'adresses dans w qui sont de forme $1^k \in \mathbf{A}_{\text{I}}$ et le nombre q est plus petit que le nombre d'adresses dans w qui sont de forme $(1^k)^{-1} \in \mathbf{A}_{\text{I}}^{-1}$.

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 5.17 et d'après un argument inductif, on a

$$\text{I}_{\alpha 1^k} = \text{I}_\alpha \bullet \text{D}_\alpha^{-1} \bullet \text{D}_{\alpha 1}^{-1} \bullet \cdots \bullet \text{D}_{\alpha 1^k}^{-1}\,.$$

On note w_0 le mot qui est obtenu à partir du mot w en remplaçant chaque adresse 1^k de $\mathbf{A}_{\text{I}}$ avec $k \geqslant 1$ par le mot équivalent. Le mot w_0 est un mot sur $(\mathbf{A}_{\text{LDLI}} \cup \{\varnothing_{\text{I}}\})^{\pm 1}$. On montre maintenant le résultat par induction sur le nombre d'adresses $\varnothing^{\pm 1} \in \mathbf{A}_{\text{I}}^{\pm 1}$ dans le mot w_0. S'il n'y a aucune telle adresse, le résultat est vrai. Supposons maintenant qu'il y en a au moins une. Supposons d'abord $\text{DI}_{w_0} = \text{DI}_{w_1} \bullet \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{w_2}$ où w_1 est un mot sur $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}^{\pm 1}$. D'après le lemme 5.21, on a $\text{DI}_{w_1} \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w_1} \bullet \text{DI}_{1w_1}$ et le mot $0w_1 \cdot 1w_1 \cdot w_2$ contient

moins d'adresses $\varnothing^{\pm 1} \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{\pm 1}$ que le mot w_0. L'argument pour $\mathrm{DI}_{w_0} = \mathrm{DI}_{w_3} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_4}$ où w_4 est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1}$ est semblable. Le dernier cas possible est $\mathrm{DI}_{w_0} = \mathrm{DI}_{w_5} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{DI}_{w_7}$ où w_6 est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1}$. On a

$$\mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} = \mathrm{DI}_{1w_6} \bullet \mathrm{DI}_{0w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} = \mathrm{DI}_{1w_6} \bullet \mathrm{DI}_{0w_6}$$

et le mot $w_5 \cdot 1w_6 \cdot 0w_6 \cdot w_7$ contient moins d'adresses $\varnothing^{\pm 1} \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{\pm 1}$ que le mot w_0. ■

Exemple 5.23 Supposons $\mathrm{DI}_w = \mathrm{I}_1^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_{01} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{11}$. Il est facile de vérifier que le terme $x \cdot (((y \cdot z) \cdot (y \cdot z)) \cdot (y \cdot z)) \cdot (((y \cdot z) \cdot (y \cdot z)) \cdot (y \cdot z))$ appartient au domaine de DI_w. Maintenant on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{DI}_w &= \mathrm{I}_1^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_{01} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{11} \\
&= \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{D}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1} \\
&= \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_1 \bullet \mathrm{D}_{00} \cdot \mathrm{D}_{10} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{011} \bullet \mathrm{D}_{111} \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{10}^{-1} \\
&\bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1} = \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{D}_1 \bullet \mathrm{D}_{00} \bullet \mathrm{D}_{10} \bullet \mathrm{D}_{01} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{D}_{000} \bullet \mathrm{D}_{100} \bullet \mathrm{D}_{010} \\
&\bullet \mathrm{D}_{110} \bullet \mathrm{D}_{011} \bullet \mathrm{D}_{111} \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1}
\end{aligned}$$

Lemme 5.24 *Soient t, t' deux termes satisfaisant $t \overset{\mathrm{LDI}}{=} t'$. Alors on a $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$ ou $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$.*

DÉMONSTRATION : Soit w un mot satisfaisant $t \bullet w = t'$. D'après le lemme 5.22, on a $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{p} \bullet \mathrm{DI}_{w'} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-q} = t'$. Notons t_1 le terme $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{p}$ et t_1' le terme $t' \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{q}$. On a $t_1 \overset{\mathrm{LDLI}}{=} t_1'$ et donc les termes t_1 et t_1' ont une LDLI-expansion commune, disons t_2. Le terme t est un sous-terme à gauche iteré de t_1 et donc, d'après la corollaire 4.32, il existe une adresse α du contour de t_2 telle que la coupure de t_2 en l'adresse α est une LDLI-expansion du terme t. De même, il existe une adresse α' du contour de t_2 telle que la coupure de t_2 en l'adresse α' est une LDLI-expansion du terme t'. Maintenant on a $\alpha \leqslant \alpha'$ ou $\alpha' \leqslant \alpha$. Si on a $\alpha \leqslant \alpha'$, alors le terme $\mathrm{cut}(t_2, \alpha)$ est une coupure de $\mathrm{cut}(t_2, \alpha')$ et, d'après la proposition 4.34, on a $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$. De même, dans le cas $\alpha' \leqslant \alpha$ on a $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. ■

On montre maintenant que deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite. Pour cette démonstration-ci, on a besoin de la conjecture 4.44.

Proposition 5.25 *Si la conjecture 4.44 est vraie, alors deux termes t et t' sont LDLI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite.*

DÉMONSTRATION : Puisque les identités LD et LI préservent la hauteur à droite, la seule direction non triviale est '$\Leftarrow$'. Soient t et t' deux termes LDI-équivalents avec la même hauteur à droite. D'après le lemme 5.24, on a $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$ ou $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. Supposons, sans perte de généralité, $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. Notons t_0 le terme t-∂_{LDI}-normal qui est LDI-équivalent à t, t_1 le terme t-∂_{LDLI}-normal qui est LDLI-équivalent à t et t_2 le terme t-∂_{LDLI}-normal qui est LDLI-équivalent à t'. D'après le lemme 4.41, le terme t_2 est une coupure d'un terme $\partial_{\mathrm{LDI}}^{k} t$, pour un k. Les termes t_1 et t_2 sont LDI-équivalents au terme t_0 et donc, d'après la conjecture 4.44, ils sont des LDI-expansions du terme t_0. Notons $t_0 \bullet u_1 = t_1$ et $t_0 \bullet u_2 = t_2$ avec u et v des mots sur $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$. D'après le lemme 5.22, on a $\mathrm{DI}_{u_i} = \mathrm{I}_{\varnothing}^{p_i} \bullet \mathrm{DI}_{w_i}$,

pour $i = 1, 2$, où w_i est un mot sur $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}^{\pm 1}$. Donc on a $t_1 \bullet \text{DI}_{w_1}^{-1} \bullet \text{I}_{\varnothing}^{-p_1} \bullet \text{I}_{\varnothing}^{p_2} \bullet \text{DI}_{w_2} = t_2$. Les mots w_1 et w_2 ne changent pas la hauteur à droite de termes et on a $\text{rht}(t_1) = \text{rht}(t_2)$ donc on a $p_1 = p_2$. Par conséquent, on a $t_1 \bullet \text{DI}_{w_1}^{-1} \bullet \text{DI}_{w_2} = t_2$. Puisque le terme t est LDLI-équivalent au terme t_1 et le terme t' est LDLI-équivalent au terme t_2, ce deux termes sont LDLI-équivalents. ■

5.3 Relations syntaxiques

Dans cette section on étudie les monoïdes définis par les relations de base des monoïdes de géométrie. On déduit de ces relations de base toutes autres types de relations démontrées pour les monoïdes de géométrie et, en particuler, la confluence.

Définition : L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDI}}$ est défini comme l'ensemble de symboles $\mathtt{di}_\alpha$, avec α de $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. Une *LDI-relation* est un couple de mots sur $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDI}}$ parmi les relations suivantes :

$(\mathtt{d}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1\beta}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0\alpha})$		type $\perp$
$(\mathtt{i}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1\beta}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 0\alpha})$		type $\perp$
$(\mathtt{d}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 1\beta}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0\alpha})$		type $\perp$
$(\mathtt{i}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 1\beta}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma 1\beta} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 0\alpha})$		type $\perp$
$(\mathtt{d}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 00\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 10\alpha})$		type D0
$(\mathtt{d}_{\gamma 10\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 01\alpha})$		type D10
$(\mathtt{d}_{\gamma 11\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 11\alpha})$		type D11
$(\mathtt{d}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma})$		type D1
$(\mathtt{i}_{\gamma\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 1\alpha})$		type I
$(\mathtt{d}_{\gamma\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1\alpha})$		type DI
$(\mathtt{i}_{\gamma 0\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 00\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 10\alpha})$		type ID0
$(\mathtt{i}_{\gamma 10\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 01\alpha})$		type ID10
$(\mathtt{i}_{\gamma 10} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 0})$		type ID10+
$(\mathtt{i}_{\gamma 11\alpha} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 11\alpha})$		type ID11
$(\mathtt{i}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 0}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma})$		type ID1
$(\mathtt{di}_{\gamma\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{di}_{\gamma\alpha} \cdot \mathtt{i}_{\gamma})$		type C
$(\mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 11} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1}\ ,\ \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{i}_{\gamma 1})$		type C
$(\mathtt{i}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{di}_{\gamma 1\alpha}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma} \cdot \mathtt{di}_{\gamma 1\alpha})$	$\lg(\alpha) \geqslant 1$	type C
$(\mathtt{i}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma})$		type C
$(\mathtt{i}_{\gamma 1} \cdot \mathtt{d}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1}\ ,\ \mathtt{i}_{\gamma} \cdot \mathtt{d}_{\gamma 1})$		type C

L'ensemble $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDLI}}$ est défini comme l'ensemble de symboles $\mathtt{di}_\alpha$, avec α dans $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}$. Une *LDLI-relation* est une LDI-relation (u, v) telle que u et v appartiennent à $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDLI}}$. Pour ¤, une des familles LDI, LDLI, la relation $\equiv_{\text{¤}}^{+}$ est définie comme la congruence du monoïde $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{¤}}^{*}$ engendrée par les ¤-relations, et la relation $\equiv_{\text{¤}}$ est définie comme la congru-

ence du monoïde $(\mathcal{A}_{\mathrm{H}}^{\pm 1})^*$ engendrée par les H-relations et par les relations $(\mathrm{di}_\gamma \cdot \mathrm{di}_\gamma^{-1}, \varepsilon)$ et $(\mathrm{di}_\gamma^{-1} \cdot \mathrm{di}_\gamma, \varepsilon)$.

Proposition 5.26 *Pour u, v dans $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}^*$, la relation $\mathrm{di}_u \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{di}_v$ implique $\mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_v$.*

DÉMONSTRATION : Il suffit de montrer le résultat pour les paires de LDI-relations. La proposition 5.12 donne le résultat pour les types $\perp$, La proposition 5.16 pour les types D0, D10, D11, I, DI, ID0, ID10 et ID11. La proposition 5.20, considérant $t = x \cdot y \cdot z$ et $\mathrm{DI}_u = \mathrm{D}_\varnothing$, donne le résultat pour le type D1, considérant $t = x \cdot y$ et $\mathrm{DI}_u = \mathrm{I}_\varnothing$, pour le type ID1 et, considérant $t = x \cdot y$ et $\mathrm{DI}_u = \mathrm{I}_0$, pour le type ID10+. Enfin, la proposition 5.17 donne le résultat pour le type C. ■

Est-ce que la réciproque de la proposition 5.26 est vraie, c'est-à-dire, est-ce que $\mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_v$ implique $\mathrm{di}_u \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{di}_v$? La réponse est négative pour l'équivalence $\equiv_{\mathrm{LDLI}}^+$. On a

$$\mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_{00} \cdot \mathrm{i}_0 \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_{000} \cdot \mathrm{i}_{010} \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{i}_{000} \cdot \mathrm{i}_{010} \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_{01} \cdot \mathrm{i}_{00} \cdot \mathrm{d}_0 \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{d}_0$$

mais on montrera dans la section 4 que l'on a $\mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_{00} \cdot \mathrm{i}_0 \not\equiv_{\mathrm{LDLI}}^+ \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{d}_0$. Par contre, la réponse pour l'équivalence $\equiv_{\mathrm{LDI}}^+$ reste inconnue.

On montre d'abord que les H-relations entraînent les mêmes familles de relations comme ces qui ont été trouvées dans les monoïdes de géométrie. On doit faire tout le calcul formellement parce que l'on n'est par sûr si toutes les relations vraies dans les monoïdes de géométrie se transcrivent sous forme de relations syntaxiques.

Proposition 5.27 *Pour u, u' deux mots sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ et α dans $\mathbf{A}$, la relation $\mathrm{di}_u \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{di}_{u'}$ implique $\mathrm{di}_{\alpha u} \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{di}_{\alpha u'}$. Pour w, w' des mots sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}^{\pm 1}$, la relation $\mathrm{di}_w \equiv_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_{w'}$ implique $\mathrm{di}_{\alpha w} \equiv_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_{\alpha w'}$.*

DÉMONSTRATION : Il le suffit montrer pour $(\mathrm{di}_u, \mathrm{di}_v)$ une H-relation. Si $(\mathrm{di}_u, \mathrm{di}_v)$ est une H-relation, alors $(\mathrm{di}_{\alpha u}, \mathrm{di}_{\alpha v})$ est aussi une H-relation. ■

Lemme 5.28 *Soient u_1 et u_2 deux mots sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ tels que chaque adresse dans u_1 est orthogonale à chaque adresse dans u_2. Alors on a*

$$\mathrm{di}_{u_1} \cdot \mathrm{di}_{u_2} \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{di}_{u_2} \cdot \mathrm{di}\, u_1 \tag{5.9}$$

$$\mathrm{di}_{u_1} \cdot \mathrm{di}_{u_2} \cdot \mathrm{i}_\varnothing \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{di}_{0u_1} \cdot \mathrm{di}_{0u_2} \cdot \mathrm{di}_{1u_1}\, \mathrm{di}_{1u_2} \tag{5.10}$$

$$\mathrm{di}_{0u_1} \cdot \mathrm{di}_{0u_2} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{di}_{00u_1} \cdot \mathrm{di}_{00u_2} \cdot \mathrm{di}_{10u_1}\, \mathrm{di}_{10u_2} \tag{5.11}$$

$$\mathrm{di}_{10u_1} \cdot \mathrm{di}_{10u_2} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{di}_{01u_1}\, \mathrm{di}_{01u_2} \tag{5.12}$$

$$\mathrm{di}_{11u_1} \cdot \mathrm{di}_{11u_2} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \equiv_{\mathrm{H}}^+ \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{di}_{11u_1}\, \mathrm{di}_{11u_2} \tag{5.13}$$

DÉMONSTRATION : Utiliser une induction sur $\lg(u_1) + \lg(u_2)$. ■

Proposition 5.29 *Supposons que u est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$, que β est une adresse de $\mathbf{A}$ et que* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *est défini. Alors on a*

$$\mathrm{d}_\beta \cdot \mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_u \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathrm{d}\,\beta',$$
$$\mathrm{i}_\beta \cdot \mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_u \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathrm{i}\,\beta'.$$

DÉMONSTRATION : La démonstration est semblable à celle de la proposition 5.16. Pour u de longueur 1, le résultat est vrai grâce à une de relations de type $\perp$, D0, D10, D11, I, DI, ID0, ID10 ou ID11. Pour u de longueur plus grande, il suffit de connaître le lemme 5.28 et le reste est semblable à la démonstration de la proposition 5.16. ■

Proposition 5.30 *Supposons que u est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$, que t n'est pas une variable et que* DI_u *envoie t sur t'. Alors on a*

$$\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_{1u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. \tag{5.14}$$

DÉMONSTRATION : La démonstration pour u dans $\mathbf{A}^*_{\mathrm{LD}}$, est faite dans [12], supposons donc $u \notin \mathbf{A}^*_{\mathrm{LD}}$. On montre le résultat par induction sur $\lg(u)$. Pour $u = \varepsilon$, le résultat est vrai, pour $u = \alpha$ on fait induction sur la longueur de α. Notons $t = t_1 \cdot t_2$. Pour $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_\varnothing$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_\varnothing \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDI}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{11\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{00\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{d}_{10\delta_{t_1}} && \text{(DI)} \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDI}} \mathrm{i}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{01\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{11\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{00\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{d}_{10\delta_{t_1}} && \text{(ID1)} \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDI}} \mathrm{i}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_t} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_t} = \mathrm{di}_{1u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. && (\perp)
\end{aligned}$$

Maintenant supposons $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_0$. On a, pour t_1 une variable,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{i}_0 \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && (\perp) \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{i}_{10} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_0 = \mathrm{di}_{1u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. && \text{(ID10+)}
\end{aligned}$$

Pour $t_1 = t_3 \cdot t_4$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_0 \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{d}_{00} \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_{000\delta_{t_3}} \cdot \mathrm{d}_{010\delta_{t_3}} \cdot \mathrm{d}_{001\delta_{t_4}} \cdot \mathrm{d}_{011\delta_{t_4}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && \text{(DI)} \\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{i}_{10} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{01\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{d}_{00\delta_{t_1}} = \mathrm{di}_{1u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. && \text{(ID10+)}
\end{aligned}$$

Supposons maintenant $\alpha = 0\beta$ avec β non vide dans $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$, respectivement dans $\mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$. On écrit $t' = t'_1 \cdot t'_2$ et on sait que DI_β envoie t_1 sur t'_1. Par hypothèse d'induction, on

a $\mathrm{d}_{\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_\beta \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{i}_{1\beta} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'_1}}$. D'après le lemme 5.27, on a $\mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{i}_{01\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}}$ et on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && (\perp)\\
&\equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_{01\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && (\text{hyp.})\\
&\equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_{10\beta} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}} = \mathrm{di}_{1\alpha} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. && (\text{ID10})
\end{aligned}$$

L'argument pour $\alpha = 1\beta$ est similaire et l'induction sur $\lg(u)$ est facile. ■

Lemme 5.31 *Pour chaque t_1, t_2, on a*

$$\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} \equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} \left(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{t_1}}\right).$$

DÉMONSTRATION : Ce produit est correctement défini parce que toutes les adresses du contour de t_2 sont deux à deux orthogonales. On montre le lemme par induction sur t_2. Lorsque t_2 est une variable, on a $\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} = \mathrm{d}_{\delta_{t_1 \cdot t_2}} = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}}$. Supposons donc $t_2 = t_3 \cdot t_4$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} &= \mathrm{d}_{\delta_{(t_1 * t_3)\cdot(t_1 * t_4)}} = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_1 * t_4}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1 * t_3}} && (\text{déf.})\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_4}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_4)} \left(\mathrm{d}_{1\alpha} \cdot \mathrm{d}_{1\alpha 0 \delta_{t_1}}\right) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_3}} \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Out}(t_3)} \left(\mathrm{d}_{0\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\beta 0 \delta_{t_1}}\right) && (\text{hyp.})\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} \left(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{t_1}}\right) && (\perp)
\end{aligned}$$

Ce qui est la forme voulue. ■

Lemme 5.32 *Pour chaque terme t et chaque u sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ on a*

$$\mathrm{di}_{0u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_t} \equiv^+_{\mathrm{H}} \mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t)} \mathrm{di}_{\alpha 0 u}\,. \tag{5.15}$$

DÉMONSTRATION : Soit t_0 un terme dans le domaine de DI_u et notons t'_0 le terme $t_0 \bullet \mathrm{DI}_u$. Alors, l'opérateur $\mathrm{DI}_{0u} \cdot \mathrm{D}_{\delta_t}$ envoie $t_0 \cdot t$ sur $t'_0 * t$. Par conséquent, le résultat du lemme résulte de la proposition 5.29. ■

Dans le chapitre 4, on a montré que les expansions sont confluentes. Ce résultat, traduit dans le langage de monoïdes, dit que chaque couple d'éléments a un multiple commun. Pour montrer cela, on introduit des éléments qui correspondent aux expansions ∂t.

Définition : Pour t un terme, on définit les éléments Δ^{LDI}_t et Δ^{LDLI}_t inductivement :

$$\Delta^{\mathrm{LDI}}_t = \begin{cases} \mathrm{i}_\varnothing & \text{lorsque } t \text{ est une variable,}\\ \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2} & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\Delta^{\mathrm{LDLI}}_t = \begin{cases} \varepsilon & \text{lorsque } t \text{ est une variable,}\\ \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2} & \text{pour } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{5.17}$$

où $\mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_u)$ signifie di_{0u}.

Lemme 5.33 *Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. Alors on a*

$$(i) \qquad \Delta_t^{\text{H}} \equiv_{\text{H}}^{+} \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{H}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{H}} t_2}}, \tag{5.18}$$

$$(ii) \qquad \Delta_t^{\text{H}} \equiv_{\text{H}}^{+} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} \mathrm{sh}_{\alpha 0}(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \Delta_{t_2}^{\text{H}}, \tag{5.19}$$

$$(iii) \qquad \Delta_t^{\text{LDI}} \equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_t^{\text{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_t^{\text{LDLI}}). \tag{5.20}$$

DÉMONSTRATION : (i) Lorsque t_2 est une variable, le résultat est vrai pour Δ_t^{LDLI}. Pour Δ_t^{LDI} on a

$$\begin{aligned} \Delta_t^{\text{LDI}} = \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_1 \cdot \mathrm{d}_{\varnothing} = \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}} && \text{(C)} \\ &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}}. && (\perp) \end{aligned}$$

Lorsque t_2 n'est pas une variable, on utilise la proposition 5.30 pour obtenir $\Delta_t^{\text{H}} \equiv_{\text{H}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}}$.

(ii) Ceci résulte du lemme 5.32.

(iii) On utilise induction sur t. Le résultat est vrai même si t est une variable. Pour $t = t_1 \cdot t_2$ on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_t^{\text{LDI}} &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) && \text{(hyp.)} \\ &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\mathrm{d}_{\delta_{t_2}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\mathrm{d}_{\delta_{t_2}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) && \text{(LI)} \\ &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_0\, \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{sh}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDLI}}) && \text{(II)} \\ &\equiv_{\text{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_t^{\text{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_t^{\text{LDLI}}), && (\perp) \end{aligned}$$

ce qui finit la démonstration. ■

On attend évidemment que l'image de t par Δ_t^{H} soit le terme $\partial_{\text{H}} t$. Pour chaque terme t on note $t \bullet \mathrm{di}_u$ le terme $t \bullet \mathrm{DI}_u$.

Proposition 5.34 *Pour chaque t, on a $t \bullet \Delta_t^{\text{H}} = \partial_{\text{H}} t$.*

DÉMONSTRATION : On utilise induction sur t. Lorsque t est une variable, le résultat est vrai. Supposons maintenant $t = t_1 \cdot t_2$. On a $\Delta_t^{\text{H}} \equiv_{\text{H}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{H}} t_2}}$. Donc on a

$$\begin{aligned} t \bullet \Delta_t^{\text{H}} = (t_1 \cdot t_2) \bullet (\mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{H}} t_2}}) &= (\partial_{\text{H}} t_1 \cdot t_2) \bullet (\mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{H}} t_2}}) = \\ &= (\partial_{\text{H}} t_1 \cdot \partial_{\text{H}} t_2) \bullet \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{H}} t_2}} = \partial t_1 * \partial t_2 \end{aligned}$$

et c'est ce que l'on voulait démontrer. ■

Le résultat suivant est une traduction du résultat que ∂t est une expansion commune de toutes les expansions de base de t.

Lemme 5.35 *Supposons que t appartient au domaine de DI_α, avec α dans $\mathbf{A}_{\text{H}}$. Alors il existe un mot u sur $\mathbf{A}_{\text{H}}$ satisfaisant $\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_u \equiv_{\text{H}}^{+} \Delta_t^{\text{H}}$.*

DÉMONSTRATION : Lorsque t est une variable, alors le résultat est vrai par définition. Supposons $t = t_1 \cdot t_2$. On utilise induction sur α. Pour $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{d}_\varnothing$, le résultat résulte du lemme 5.33 (*ii*). Pour $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_\varnothing$ ou $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_0$, on utilise le lemme 5.33 (*iii*). Supposons maintenant $\alpha = 0\beta$ avec β dans $\mathbf{A}_\mathrm{H}$ non vide. Par définition, le mot Δ^H_t commence par $\mathrm{sh}_0\,\Delta^\mathrm{H}_{t_1}$. Par hypothèse d'induction, le mot $\Delta^\mathrm{H}_{t_1}$ est équivalent à $\mathrm{di}_\beta \cdot \mathrm{di}_{u'}$ pour un mot u'. Donc on obtient $\Delta^\mathrm{H}_t \equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_{0u'} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^\mathrm{H}_{t_2}$. L'argument est semblable pour $\alpha = 1\beta$ à cause du lemme 5.33 (*i*). ■

Le lemme suivant dit que les mots Δ^H_t grossissent avec les expansions.

Lemme 5.36 *Si α de $\mathbf{A}_\mathrm{H}$ envoie t sur t', alors il existe un mot u sur $\mathbf{A}_\mathrm{H}$ tel que l'on a $\mathrm{di}_\alpha \cdot \Delta^\mathrm{H}_{t'} \equiv^+_\mathrm{H} \Delta^\mathrm{H}_t \cdot \mathrm{di}_u$.*

DÉMONSTRATION : On montre le résultat par induction sur α. Pour $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_\varnothing$, on a

$$\mathrm{di}_\alpha \cdot \Delta^{\mathrm{LDI}}_{t'} \equiv^+_{\mathrm{LDI}} \mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_t) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDI}}_t) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t}} \equiv^+_{\mathrm{LDI}} \Delta^{\mathrm{LDI}}_t \cdot \mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t}}.$$

Pour $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{i}_0$ et $t = t_1 \cdot t_2$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{di}_\alpha \cdot \Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t'} &\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1 \cdot t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2}} && \text{(I, DI)}\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2}} \cdot \Pi_{\beta \in \mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2)}(\mathrm{i}_{\beta 0} \cdot \mathrm{d}_{\beta 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.32)}\\
&\equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \Delta^{\mathrm{LDLI}}_t \cdot \Pi_{\beta \in \mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDLI}} t_2)}(\mathrm{i}_{\beta 0} \cdot \mathrm{d}_{\beta 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}). && \text{(L 5.33)}
\end{aligned}$$

Supposons $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{d}_\varnothing$ et $t = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\alpha \cdot \Delta^\mathrm{H}_{t'} &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \Delta^\mathrm{H}_{(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1 \cdot t_2}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^\mathrm{H}_{t_1 \cdot t_3}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_\mathrm{H}(t_1 \cdot t_3)}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2}} \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_3})\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1 * \partial_\mathrm{H} t_3}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^\mathrm{H}_{t_3}) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}}\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1 * \partial_\mathrm{H} t_3}} && (\perp, \text{L0, IL0})\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^\mathrm{H}_{t_3}) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}}\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1 * \partial_\mathrm{H} t_3}} && \text{(L10, IL10)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^\mathrm{H}_{t_3}) \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}}\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1 * \partial_\mathrm{H} t_3}} && \text{(L11, IL11)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^\mathrm{H}_{t_3}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2 \cdot \partial_\mathrm{H} t_3}}\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.31)}\\
&\equiv^+_\mathrm{H} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^\mathrm{H}_{t_3}) \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{\partial_\mathrm{H} t_3}}\\
&\qquad \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_2 * \partial_\mathrm{H} t_3}} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.30)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2 \cdot t_3}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}}(t_2 \cdot t_3)}} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}). && \text{(L 5.33)}
\end{aligned}$$

Maintenant supposons $\alpha = 0\beta$ et $t = t_1 \cdot t_2$. Puisque i_β envoie t_1 sur un terme, disons t'_1, on a $\mathrm{i}_\beta \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'_1} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t_1} \cdot \mathrm{di}_{u'}$ pour un mot u'. Donc on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_\alpha \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} &= \mathrm{i}_{0\beta} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'_1 \cdot t_2} = \mathrm{i}_{0\beta} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t'_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t_2}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{di}_{0u'} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}} && \text{(hyp)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}} \cdot \Pi(\mathrm{di}_{\beta 0 u'}) && \text{(L 5.32)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t} \cdot \Pi(\mathrm{di}_{\beta 0 u'}).
\end{aligned}$$

Enfin, on suppose $\alpha = 1\beta$ et $t' = t_1 \cdot t'_2$. Par hypothèse, on a $\mathrm{i}_\beta \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'_2} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t_2} \cdot \mathrm{di}_{u'}$. On trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}_\alpha \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} &\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{i}_{1\beta} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t'_2}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t'_2}}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t_2}) \cdot \mathrm{di}_{1u'} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t'_2}} && \text{(hyp)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}} \cdot \mathrm{di}_{u'} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t} \cdot \mathrm{di}_{u'} && \text{(L 5.30)}
\end{aligned}$$

où l'égalité $\mathrm{di}_{1u'} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t'_2}} \equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}} \cdot \mathrm{d}_{u'}$ résulte du lemme 5.30 puisqu'on a $t_2 \bullet (\mathrm{i}_\beta \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'_2}) = \partial_{\text{¤}} t'_2 = t_2 \bullet (\Delta^{\text{¤}}_{t_2} \cdot \mathrm{di}_{u'})$ et donc on a $\partial_{\text{¤}} t'_2 = \partial_{\text{¤}} t_2 \bullet \mathrm{d}_{u'}$. ■

Lemme 5.37 *Supposons que u est un mot sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ et que DI_u envoie t sur t'. Alors il existe un mot positif u' satisfaisant*

$$\mathrm{di}_u \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t} \cdot \mathrm{di}_{u'}\,. \tag{5.21}$$

DÉMONSTRATION : On utilise une induction sur $\lg(u)$. Pour $u = \varepsilon$, le résultat est trivial. Pour $\lg(u) = 1$, le résultat est énoncé dans le lemme 5.36. Supposons maintenant $u = u_1 \cdot u_2$, où ni u_1 ni u_2 ne sont vides. Soit $t_1 = t \cdot \mathrm{DI}_u$. Par hypothèse d'induction, il existe u'_1 et u'_2 satisfaisant $\mathrm{di}_{u_1} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t_1} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t} \cdot \mathrm{di}_{u'_1}$ et $\mathrm{di}_{u_2} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t_1} \cdot \mathrm{di}_{u'_2}$. On en déduit $\mathrm{di}_u \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} \equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{di}_{u_1} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t_1} \cdot \mathrm{di}_{u'_2} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_{t} \cdot \mathrm{di}_{u'_1} \cdot \mathrm{di}_{u'_2}$. ■

Dans le chapitre 4, on a montré que chaque ¤-k-expansion d'un terme t admet $\partial^k_{\text{¤}} t$ comme une ¤-expansion. On exprime maintenant le résultat en utilisant les opérateurs di.

Définition : Pour chaque terme t, on pose ${}^0\Delta^{\text{¤}}_t = \varepsilon$ et ${}^k\Delta^{\text{¤}}_t = \Delta^{\text{¤}}_t \cdot \Delta^{\text{¤}}_{\partial_{\text{¤}} t} \cdot \cdots \cdot \Delta^{\text{¤}}_{\partial^{k-1}_{\text{¤}} t}$ pour $k \geqslant 1$.

Lemme 5.38 *Soit u un mot sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ de longueur au plus k et soit t un terme du domaine de DI_u. Alors, il existe un mot v' sur $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ satisfaisant $\mathrm{di}_u \cdot \mathrm{di}_{v'} \equiv^+_{\text{¤}} {}^k\Delta^{\text{¤}}_t$.*

DÉMONSTRATION : On utilise une induction sur k. Pour $k = 0$, le résultat est trivial. Autrement, on écrit $u = u_0 \cdot \alpha$ avec α dans $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$. Par hypothèse d'induction, il existe un mot positif v_0' satisfaisant $\mathrm{di}_{u_0} \cdot \mathrm{di}_{v_0'} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} {}^{k-1}\Delta_t^{\mathrm{H}}$. Soit t' l'image de t par DI_{u_0}. Par hypothèse, le terme t' appartient au domaine de DI_α et donc, d'après le lemme 5.36, il existe un mot positif v qui satisfait $\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_v \equiv_{\mathrm{H}}^{+} \Delta_{t'}^{\mathrm{H}}$. En appliquant le lemme 5.37 aux termes t' et $\partial_{\mathrm{H}}^{k-1} t$, on voit qu'il existe un mot positif v_0'' qui satisfait $\mathrm{di}_{v_0'} \cdot \Delta_{\partial_{\mathrm{H}}^{k-1} t}^{\mathrm{H}} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} \Delta_{t'}^{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{di}_{v_0''}$. On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{di}_u \cdot \mathrm{di}_v \cdot \mathrm{di}_{v_0''} = \mathrm{di}_{u_0} \cdot \mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_v \cdot \mathrm{di}_{v_0''} &\equiv_{\mathrm{H}}^{+} \mathrm{di}_{u_0} \cdot \Delta_{t'}^{\mathrm{H}} \cdot \mathrm{di}_{v_0''} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} \\ &\equiv_{\mathrm{H}}^{+} \mathrm{di}_{u_0} \cdot \mathrm{di}_{v_0'} \cdot \Delta_{\partial_{\mathrm{H}}^{k-1} t}^{\mathrm{H}} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} {}^{k-1}\Delta_t^{\mathrm{H}} \cdot \Delta_{\partial_{\mathrm{H}}^{k-1} t}^{\mathrm{H}} = {}^{k}\Delta_t^{\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient le résultat en posant $v' = v \cdot v_0''$. ■

Proposition 5.39 *Soient u, v deux mots sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ de longueur au plus k. Alors il existe des mots u', v' sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ satisfaisant*

$$\mathrm{di}_u \cdot \mathrm{di}_{v'} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} \mathrm{di}_v \cdot \mathrm{di}_{u'} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} {}^{k}\Delta_{t_{u,v}^L}^{\mathrm{H}}. \tag{5.22}$$

DÉMONSTRATION : D'après la proposition 5.10, l'intersection des domaines des opérateurs DI_u et DI_v consiste en substitués du terme $t_{u,v}^L$. L'application du lemme 5.38 à $t_{u,v}^L$ donne deux mots positifs u' et v' tels que $\mathrm{di}_u \cdot \mathrm{di}_{v'}$ et $\mathrm{di}_v \cdot \mathrm{di}_{u'}$ sont $\equiv_{\mathrm{H}}^{+}$-équivalents à ${}^{k}\Delta_{t_{u,v}^L}^{\mathrm{H}}$. ■

On a montré que les relations $\equiv_{\mathrm{H}}^{+}$ décrivent assez bien les monoïdes de géométrie dans le sens que tous les résultats trouvés pour les monoïdes de géométrie sont aussi vrais en utilisant les relations $\equiv_{\mathrm{H}}^{+}$. Ceci nous permet de travailler plutôt avec les relations $\equiv_{\mathrm{H}}^{+}$ qu'avec les monoïdes de géométrie et d'utiliser des méthodes basées sur des présentations comme la méthode du retourmenent de mots dans la prochaine section. On finit cette section par deux résultats sur l'équivalence $\equiv_{\mathrm{H}}$. Le premier est un analogue du résultat 4.12.

Proposition 5.40 *Si w est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}^{\pm 1}$ qui contient k adresses positives, et si un terme t appartient au domaine de DI_w, alors il existe un mot u sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ satisfaisant $\mathrm{di}_w \cdot \mathrm{di}_u \equiv_{\mathrm{H}} {}^{k}\Delta_t^{\mathrm{H}}$.*

DÉMONSTRATION : L'argument est similaire à celui utilisé en montrant le lemme 5.38. On fait induction sur k. Pour $k = 0$, le mot w contient uniquement des adresses négatives et, en définissant $u = w^{-1}$, on obtient $\mathrm{di}_w \cdot \mathrm{di}_{w'} \equiv_{\mathrm{H}} \varepsilon$. Supposons maintenant $k > 0$. On écrit $w = w_0 \cdot \alpha \cdot v_0^{-1}$, où α est une adresse positive et v_0 un mot positif. Par hypothèse d'induction, il existe un mot positif u_0 qui satisfait $w_0 \cdot u_0 \equiv_{\mathrm{H}} {}^{k-1}\Delta_t^{\mathrm{H}}$. Soit t' l'image de t par DI_{w_0}. Il existe un mot positif v' qui satisfait $\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_{v'} \equiv_{\mathrm{H}}^{+} \mathrm{di}_{u_0} \cdot \Delta_{\partial_{\mathrm{H}}^{k-1} t}^{\mathrm{H}}$. On obtient le résultat en posant $u = v \cdot v' \cdot u_0'$. ■

Enfin, on présente le résultat qui dit que deux éléments H-équivalents ont une expansion commune.

Proposition 5.41 *Si w est un mot sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}^{\pm 1}$ tel que le domaine de DI_w n'est pas vide, alors il existe des mots u, v sur $\mathbf{A}_{\mathrm{H}}$ satisfaisant $\mathrm{di}_w \equiv_{\mathrm{H}} \mathrm{di}_u \cdot \mathrm{di}_{v^{-1}}$.*

DÉMONSTRATION : Corollaire immédiat de la proposition 5.40. ■

5.4 Monoïde syntaxique

Dans cette section on étudie le monoïde engendré par les LDLI-relations en utilisant la méthode de présentation complémentée, présentée dans [16]. Cette méthode nous donne un algorithme pour résoudre le problème de mots de ce monoïde et elle permet de dire que ce monoïde et simplifiable et que l'ordre de divisibilité forme un treillis. On ne s'intéresse pas aux LDI-relations parce qu'il y en a trop et le monoïde correspondant semble laisser ésperer moins d'applications que le monoïde de LDLI.

Définition [12] : Soit A un alphabet. On dit que f est un *complément* sur A si f est une application partielle de $A \times A$ vers A^* satisfaisante $f(x,x) = \varepsilon$, pour chaque x de A, et que $f(x,y)$ existe si $f(y,x)$ existe. On note $\equiv_f^+$ la relation engendrée par les relations $(xf(x,y), yf(y,x))$ avec (x,y) dans le domaine de f. Le monoïde *associé à f à droite* est le monoïde A^* quotienté par $\equiv_f^+$. On note $\equiv_f$ la relation engendrée par les les relations $(xf(x,y), yf(y,x))$ avec (x,y) dans le domaine de f completées par les relations (xx^{-1}, ε) et $(x^{-1}x, \varepsilon)$. Le groupe *associé à f à droite* est le monoïde $(A \cup A^{-1})^*$ quotienté par $\equiv_f$.

Définissons le monoïde syntaxique de LDLI M_{LDLI} comme le monoïde $(\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1})^*$ quotienté par les LDLI-relations. On voit que le monoïde M_{LDLI} est associé à un complément à droite : on a

$$f(\mathrm{d}_\alpha, \mathrm{di}_\beta) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour } \mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_\beta, \\ \mathrm{di}_\beta & \text{pour } \beta \perp \alpha \text{ ou } \alpha 11 \sqsubseteq \beta \text{ ou } (\beta \sqsubset \alpha \text{ et } \alpha \neq \beta 1), \\ \mathrm{i}_\beta & \text{pour } \mathrm{di}_\beta = \mathrm{i}_\beta \text{ et } (\alpha = \beta \text{ ou } \alpha = \beta 1), \\ \mathrm{di}_{\alpha 10\gamma} \cdot \mathrm{di}_{\alpha 00\gamma} & \text{pour } \beta = \alpha 0\gamma, \\ \mathrm{di}_{\alpha 01\gamma} & \text{pour } \beta = \alpha 10\gamma \text{ et } \beta \neq \alpha 10_{\mathrm{I}}, \\ \mathrm{i}_{\alpha 0} & \text{pour } \beta = \alpha 10_{\mathrm{I}}, \\ \mathrm{d}_\beta \cdot \mathrm{d}_\alpha & \text{pour } \beta = \alpha 1, \\ \mathrm{d}_\beta \cdot \mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\beta 0} & \text{pour } \alpha = \beta 1, \end{cases}$$

$$f(\mathrm{i}_\alpha, \mathrm{di}_\beta) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pour } \mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_\beta, \\ \mathrm{di}_\beta & \text{pour } \beta \perp \alpha \text{ ou } (\beta \sqsubset \alpha \text{ et } (\alpha \neq \beta 10 \text{ ou } \beta \in \mathbf{A}_{\mathrm{LI}})), \\ \mathrm{di}_{\alpha 0\gamma} \cdot \mathrm{di}_{\alpha 1\gamma} & \text{pour } \beta = \alpha\gamma \text{ et } \mathrm{di}_\alpha \neq \mathrm{di}_\beta, \\ \mathrm{d}_\beta \cdot \mathrm{d}_{\beta 0} & \text{pour } \alpha = \beta 10 \text{ et } \beta \in \mathbf{A}_{\mathrm{LD}}. \end{cases}$$

Les LDI-relations ne donnent pas un complément parce qu'il y a, par exemple, la relation $\mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_\varnothing \equiv_{\mathrm{LDI}}^+ \mathrm{i}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_0 \cdot \mathrm{i}_1$.

Les présentations complementées permettent d'utiliser une méthode combinatoire appelée le *retournement de mots*. Le retournement consiste à remplacer de façon itérée un sous-mot $x^{-1} \cdot y$ par le sous-mot $f(x,y) \cdot f(y,x)^{-1}$.

Définition [16] : Soient w, w' deux mots. On dit que w se *retourne (à droite)* vers w', noté $w \curvearrowright w'$, s'il existe une suite de mots $w = w_1, \ldots, w_k = w'$ satisfaisant, pour chaque $i < k$,

$$w_i = w_i' \cdot x_i^{-1} \cdot y_i \cdot w_i'' \qquad \text{et} \qquad w_{i+1} = w_i' \cdot f(x_i, y_i) \cdot f(y_i, x_i)^{-1} \cdot w_i''$$

où x_i et y_i sont des lettres.

On voit que $w \curvearrowright w'$ implique $w \equiv_f w'$. Donc on obtient éventuellement par retournement un mot qui est équivalent à w et qui est un produit d'un mot positif et d'un mot négatif. A priori, le retournement n'est pas un procès déterministe, à chaque étape on peut returner n'importe quel couple de lettres $x^{-1}y$. Cependant, le processus est confluent et si on arrive à un mot vu^{-1}, alors le mot est unique.

Proposition 5.42 [12] *Chaque mot w se retourne vers au plus un mot sous la forme $v \cdot u^{-1}$ avec u et v mots positifs.*

Définition [12] : Soient u et v deux mots positifs. On définit $u \backslash v$ comme le mot unique v' tel que $v^{-1}u$ se retourne vers $v'u'^{-1}$ avec u' et v' positifs, si un tel mot existe.

On voit, en particulier, que l'on a $x \backslash y = f(x,y)$ pour tous x, y dans A. Si on a $u \backslash v = v \backslash u = \varepsilon$, alors on a $u \equiv_f^+ v$. On voudrait que cette implication soit une équivalence, c'est-à-dire on voudrait avoir $u \equiv_f^+ v$ si et seulement si on a $u^{-1}v \curvearrowright \varepsilon$.

Définition [16] : On dit qu'un complément est *homogène à droite*, s'il existe une application λ satisfaisant

$$\lambda(xv) > \lambda(v), \quad \lambda(vx) \geqslant \lambda(v) \quad \text{et} \quad \lambda(u) = \lambda(v) \tag{5.23}$$

pour x dans A et $u \equiv_f^+ v$ mots positifs.

Proposition 5.43 [16] *Soit M un monoïde associé à droite à un complement $f : A \times A \to A^*$ homogène à droite. Alors la relation $u^{-1}v \curvearrowright \varepsilon$ implique $u \equiv_f^+ v$ si et seulement si la condition suivante est satisfaite pour tous x, y, z dans A :*

$$((x \backslash y) \backslash (x \backslash z)) \backslash ((y \backslash x) \backslash (y \backslash z)) = \varepsilon \tag{5.24}$$

On veut montrer que le monoïde M_{LDLI} satisfait les conditions de la proposition 5.43. On commence par l'homogénité du complément f.

Lemme 5.44 *Le complément f du monoïde M_{LDLI} est homogène à droite.*

DÉMONSTRATION : On définit, pour chaque mot positif u,

$$\lambda(\mathrm{di}_u) = \lg(t_u^R) - \lg(t_u^L)$$

Puisque $\mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{di}_v$ implique $\mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_v$, on a $t_u^L = t_v^L$ et $t_u^R = t_v^R$ et donc aussi $\lambda(\mathrm{di}_u) = \lambda(\mathrm{di}_v)$. Par définition, on a $t_{\alpha\cdot u}^R = t_{\alpha\cdot u}^L \bullet \alpha \bullet u$, donc il existe une substitution h satisfaisant $t_{\alpha\cdot u}^L \bullet \alpha = (t_u^L)^h$ et $t_{\alpha\cdot u}^R = (t_u^R)^h$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_u) &= \lg(t_{\alpha\cdot u}^R) - \lg(t_{\alpha\cdot u}^L) \\
&= \lg(t_{\alpha\cdot u}^R) - \lg(t_{\alpha\cdot u}^L \bullet \alpha) + \lg(t_{\alpha\cdot u}^L \bullet \alpha) - \lg(t_{\alpha\cdot u}^L) \\
&= \lg((t_u^R)^h) - \lg((t_u^L)^h) + \lg(t_{\alpha\cdot u}^L \bullet \alpha) - \lg(t_{\alpha\cdot u}^L) \\
&> \lg((t_u^R)^h) - \lg((t_u^L)^h) \geqslant \lg(t_u^R) - \lg(t_u^L) = \lambda(\mathrm{di}_u).
\end{aligned}$$

Un argument semblable montre $\lambda(u \cdot \alpha) > \lambda(u)$ et donc f est homogène à droite. ■

Proposition 5.45 *Le complément f du monoïde M_{LDLI} satisfait la condition 5.24.*

DÉMONSTRATION : On écrit d'abord $\mathrm{di}_u =^\perp \mathrm{di}_v$ pour deux mot positifs u et v si le mot v est obtenu à partir de u par plusieurs remplacements d'un sous-mot $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ par le sous-mot $\alpha_2 \cdot \alpha_1$ avec $\alpha_1 \perp \alpha_2$. On a $\lg(u) = \lg(v)$ et on montre par induction sur $\lg(u)$ que l'on a $\mathrm{di}_u^{-1} \cdot \mathrm{di}_v \curvearrowright \varepsilon$. Pour $u = \varepsilon$ le résultat est trivial. Supposons $u = \alpha \cdot u_0$. Le mot v est sous la forme $v_0 \cdot \alpha \cdot v_1$, où chaque adresse de v_0 est orthogonale à α. On a maintenant

$$\mathrm{di}_u^{-1} \cdot \mathrm{di}_v \curvearrowright \mathrm{di}_{u_0}^{-1} \cdot \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_\alpha^{-1} \cdot \mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_{v_1} \curvearrowright \mathrm{di}_{u_0}^{-1} \cdot \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_{v_1} \curvearrowright \varepsilon$$

par hypothèse d'induction parce que l'on a $\mathrm{di}_{u_0} =^\perp \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_{v_1}$.

On montre maintenant le résultat. On considère tous les triplets di_α, di_β, di_γ de $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{LDLI}}$. Puisque les LDLI-relations sont closes par décalage, on peut considérer que le plus grand préfixe commun de α, β et γ est l'adresse $\varnothing$.

Cas 1. *Deux éléments sont égaux.* Supposons $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_\beta$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \varepsilon\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \varepsilon\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash\varepsilon = \varepsilon, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \varepsilon;
\end{aligned}$$

et cela suffit parce que α et β jouent un rôle symétrique.

Cas 2. *Une adresse est orthogonale au plus grand préfixe commun des autres deux adresses.* Supposons que γ est orthogonale au plus grand préfixe commun des autres α et β. Dans ce cas, γ est aussi orthogonale à chaque adresse dans les mots $\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta$ et $\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash \mathrm{di}_\gamma = \mathrm{di}_\gamma, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash \mathrm{di}_\gamma = \mathrm{di}_\gamma; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_\gamma \backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha), \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_\gamma \backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha);
\end{aligned}$$

et cela suffit de nouveau parce que α et β jouent des rôles symétriques.

Cas 3. *Un des éléments est* $\mathrm{i}_\varnothing$. Supposons $\mathrm{di}_\gamma = \mathrm{i}_\varnothing$. On peut supposer que les autres adresses sont différentes de $\mathrm{i}_\varnothing$, autrement on est dans le cas 1. On a

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash \mathrm{i}_\varnothing = \mathrm{i}_\varnothing,\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash \mathrm{i}_\varnothing = \mathrm{i}_\varnothing;\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \mathrm{i}_\varnothing \backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) =^\perp (\mathrm{di}_{0\beta} \setminus \mathrm{di}_{0\alpha}) \cdot (\mathrm{di}_{1\beta} \setminus \mathrm{di}_{1\alpha}),\\
&(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_{0\beta} \cdot \mathrm{di}_{1\beta})\backslash(\mathrm{di}_{0\alpha} \cdot \mathrm{di}_{1\alpha}) = (\mathrm{di}_{0\beta} \setminus \mathrm{di}_{0\alpha}) \cdot (\mathrm{di}_{1\beta} \setminus \mathrm{di}_{1\alpha});
\end{aligned}$$

Cas 4. *Une adresse est un préfixe propre du plus grand préfixe des autres deux adresses.* On suppose que γ est un préfixe du plus grand préfixe γ' de α et de β. On peut supposer $\mathrm{di}_\gamma = \mathrm{d}_\varnothing$, autrement on est dans le cas 3.

Cas 4.1. *L'adresse 0 est un préfixe de α et de β.* On écrit $\alpha = 0\alpha_0$ et $\beta = 0\beta_0$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0})\\
&=^\perp \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) \cdot \mathrm{sh}_{00}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}),\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{di}_{10\beta_0} \cdot \mathrm{di}_{00\beta_0})\backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) \cdot \mathrm{sh}_{00}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0});
\end{aligned}$$

et cela suffit de nouveau parce que α et β jouent des rôles symétriques.

Cas 4.2. *L'adresse* 1 *est un préfixe propre d'un préfix commun de α et de β.*

Cas 4.2.1. *Un des éléments est* i_{10}. On suppose $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{i}_{10}$ et $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \neq \mathrm{i}_{10}$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{101\alpha_0})\backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0})\backslash \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{101\alpha_0})\\
&= \mathrm{d}_0 \backslash(\mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0}) = \mathrm{di}_{001\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \setminus \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{di}_{001\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{01\alpha_0} \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0\,.
\end{aligned}$$

Cas 4.2.2. *Aucun des éléments n'est* i_{10}. On écrit $\alpha = 1e\alpha_0$ et $\beta = 1e\beta_0$ avec $e = 0$ ou $e = 1$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) = \mathrm{sh}_{e1}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}),\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{e1\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{e1\alpha_0} = \mathrm{sh}_{e1}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0});
\end{aligned}$$

et cela suffit à cause de rôles symétriques de α et β.

Cas 4.3. *L'adresse* 1 *est le plus grand préfixe commun de* α *et de* β.

Cas 4.3.1. *Les adresses* α *et* β *sont orthogonales.*

Cas 4.3.1.1 *Un des éléments est* i_{10}. On suppose $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{i}_{10}$ et $\alpha = 11\alpha_0$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0\,.
\end{aligned}$$

Cas 4.3.1.2 *Aucun des éléments n'est* i_{10}. On suppose $\beta = 10\beta_0$ et $\alpha = 11\alpha_0$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{10\beta_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{10\beta_1} \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{10\beta_0} = \mathrm{di}_{10\beta_0},\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{10\beta_0} = \mathrm{di}_{10\beta_0}\,.
\end{aligned}$$

Cas 4.3.2. *Les adresses* α *et* β *sont comparables.* On peut supposer que β est un préfixe propre de α, donc $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{d}_1$.

Cas 4.3.2.1 *L'adresse* 10 *est un préfixe de* α.

Cas 4.3.2.1.1. *L'élément* di_α *est* i_{10}. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot((\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot(\mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_{00},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{i}_{100} \cdot \mathrm{i}_{110})\backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{i}_{010} \cdot \mathrm{i}_{110})\backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{00};\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{i}_{100} \cdot \mathrm{i}_{110}) = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{i}_{010} \cdot \mathrm{i}_{110}) = \mathrm{i}_{00} \cdot \mathrm{i}_{10},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{i}_0 = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_{10} \cdot \mathrm{i}_{00};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing\,.
\end{aligned}$$

Cas 4.3.2.1.2. *L'élément* di_α *n'est pas* i_{10}. On écrit $\alpha = 10\alpha_0$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0})\backslash(\mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0}) \\
&= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0}) = \mathrm{di}_{101\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{001\alpha_0}, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{di}_{101\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{001\alpha_0}; \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{01\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing;
\end{aligned}$$

Cas 4.3.2.2 *L'adresse* 11 *est un préfixe propre de* α.

Cas 4.3.2.2.1. *L'élément* di_α *est* i_{110}. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_{10} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0) \\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot(\mathrm{d}_{01} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_{00}, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0) \\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot(\mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{00} \cdot \mathrm{d}_{01}; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{i}_{110} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0; \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{i}_{110} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot(\mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10}) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_{10}) \\
&= \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_{01}) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0;
\end{aligned}$$

et on trouve

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_{10}^{-1} \cdot \mathrm{d}_1^{-1} \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 &\curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_{10}^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 \\
&\curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01}^{-1} \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 \curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_0 \curvearrowright \varepsilon.
\end{aligned}$$

Cas 4.3.2.1.2. *L'élément* di_α *n'est pas* i_{110}. On écrit $\alpha = 11e\alpha_0$. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{e11\alpha_0} = \mathrm{di}_{e11\alpha_0}, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{di}_{11e\alpha_0} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} = \mathrm{di}_{e11\alpha_0}; \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11e\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing .
\end{aligned}$$

Cas 4.3.2.3 *L'adresse* α *est* 11. Toutes les trois adresses appartiennent à $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$ et ce cas est montré dans [12].

Cas 4.4. *L'adresse* $\varnothing$ *est le plus grand préfix commun de* α *et* β. On peut supposer $\alpha \perp \beta$, autrement on est dans le cas 1. On écrit $\alpha = 0\alpha_0$.

Cas 4.4.1. *L'adresse* 1 *est un préfix propre de* β.

Cas 4.4.1.1. *L'élément* di_β *est* i_{10}. On a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{0\alpha_0} = \mathrm{d}_0 \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0}) = \mathrm{di}_{00\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0 .
\end{aligned}$$

Cas 4.4.1.2. *L'élément* di_β *n'est pas* i_{10}. On écrit $\beta = 1e\beta_0$ et on a

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{1e\beta_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{0\alpha_0} = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{e1\beta_0} \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0}) = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash \mathrm{di}_{e1\beta_0} = \mathrm{di}_{e1\beta_0},\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{1e\beta_0} = \mathrm{di}_{1e\beta_0} .
\end{aligned}$$

Cas 4.4.2. *L'adresse* β *est égale à* 1. On trouve

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{0\alpha_0} = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing .
\end{aligned}$$

Cas 5. *Le plus grand préfixe de deux adresses est un préfixe de la troisième adresse.* Supposons que le plus grand préfixe γ' de α et β est un préfixe de γ. Si on a $\beta = \gamma'$ ou $\gamma = \gamma'$, alors on est dans le cas 4. Si α et β sont orthogonales, alors on est forcement dans le cas 1. On a considéré tous les cas et la démonstration est finie. ■

On déduit de la proposition 5.43 :

Proposition 5.46 *On a* $\mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{di}_v$ *si et seulement si on a* $\mathrm{di}_v^{-1} \cdot \mathrm{di}_u \curvearrowright \varepsilon$.

Chaque monoïde qui satisfait les conditions de la proposition 5.43 a de bonnes propriétés :

Proposition 5.47 *Le monoïde M_{LDLI} est simplifiable à gauche et l'ordre de divisibilité à gauche sur M_{LDLI} forme un treillis.*

DÉMONSTRATION : Il est montré dans [12] que chaque monoïde qui satisfait les conditions de la proposition 5.43 est simplifiable à gauche, deux éléments admettent un et unique plus grand diviseur à gauche commun et deux éléments qui admettent un multiple à droite commun admettent un et unique plus petit multiple à droite. D'après la proposition 5.40, chaque couple d'éléments de M_{LDLI} admet un multiple à droite commun et donc l'ordre de divisibilité à gauche sur M_{LDLI} forme un treillis. ■

Remarque 5.48 On ne peut pas avoir $\mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{i}_{00} \cdot \mathtt{i}_0 \equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{d}_0$, parce que l'on a $\text{I}_{00} \bullet \text{I}_0 \neq \text{I}_0 \bullet \text{D}_0$: l'opérateur $\text{I}_{00} \bullet \text{I}_0$ envoie $(x \cdot y) \cdot z$ sur $(((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot z$ et l'opérateur $\text{I}_0 \bullet \text{D}_0$ envoie $(x \cdot y) \cdot z$ sur $(((x \cdot y) \cdot x) \cdot ((x \cdot y) \cdot y)) \cdot z$. Par contre, on a montré dans la dernière section la relation $\text{I}_0 \bullet \text{I}_{00} \bullet \text{I}_0 = \text{I}_0 \bullet \text{I}_0 \bullet \text{D}_0$. Par conséquent, la projection canonique de M_{LDLI} sur $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$ n'est pas un isomorphisme.

On voit maintenant pourquoi on a défini les LDLI-relations comme elles ont été définies. Le monoïde M_{LDLI} est plus grand que le monoïde $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$ et pourtant il conserve toutes les bonnes propriétés de $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$. De plus, il est simplifiable à gauche et il est fort possible que son groupe de fractions n'est pas « trop loin » du monoïde $\mathcal{G}_{\text{LDLI}}$. Ceci n'est pas vrai dans le cas de LDI parce qu'il est facile de voir que l'on a $\mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_0$:

$$\mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{i}_0 \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_0 \,.$$

Par conséquent, la relation $\equiv_{\text{LDI}}$ est loin de pouvoir bien décrire le monoïde $\mathcal{G}_{\text{LDI}}$.

Dans [12], une solution comment à décider si deux termes sont LD-équivalents a été établie en utilisant le monoïde syntaxique de LD. Cette solution consiste à trouver une application injective de l'ensemble des classes de la LD-équivalence dans le groupe de fraction du monoïde syntaxique. Peut-être, une solution analogue existe aussi pour LDLI et ceci permetrait de résoudre le problème de mots pour LDLI mais aussi pour LDI, d'après la proposition 5.25.

Chapitre 6

Construction de LDLI-systèmes

Dans ce chapitre on étudie les systèmes distributifs à gauche idempotents à gauche. On montre que chaque LDLI-système possède une congruence canonique dont le quotient est un système idempotent. Cette congruence met en jeu une construction des LDLI-systèmes en utilisant de LDI-systèmes et des systèmes constants à droite. Ensuite, on utilise cette méthode pour construire les LDLI-systèmes libres et pour caractériser la variété des LDLI-systèmes.

Dans la section 1, on introduit une congruence sur chaque LDLI-système dont le quotient est un LDI-système. Dans la section 2, on trouve une construction basée sur cette congruence. Ensuite on donne une application de cette construction. Dans la section 3, on construit des LDLI-systèmes possiblement libres et on montre que leur liberté est équivalente au résultat que la LDLI-équivalence est l'intersection de la LDI-équivalence et de l'équivalence constante à droite.

6.1 Congruence idempotente sur des LDLI-systèmes

Dans cette section on définit la congruence ip_G et on montre que son quotient est un LDI-système. Sauf mention contraire, chaque système considéré dans ce chapitre est muni de l'opération binaire $\cdot$. On commence par deux lemmes concernant les LI-systèmes. On écrit abc pour $a \cdot (b \cdot c)$ et a^k pour $a \cdot a^{k-1}$.

Lemme 6.1 *Soit G un LI-système et soit a dans G. Alors on a, pour tous a, b dans G,*

$$a^k b = ab \qquad \text{et} \qquad (a^k)^l = a^{k+l-1}. \tag{6.1}$$

Démonstration : On montre d'abord $a^k b = ab$ pour tous a, b dans G. Le résultat est évident pour $k = 1$. Pour $k > 1$, on a

$$a^k b = (a \cdot a^{k-1})b = (a^{k-1} \cdot a^{k-1})b = a^{k-1}b = ab.$$

On montre maintenant l'autre résultat par induction sur l. Puisqu'il est vrai pour $l = 1$, on suppose $l > 1$. On a

$$(a^k)^l = (a^k) \cdot (a^k)^{l-1} = a \cdot a^{k+l-2} = a^{k+l-1},$$

et c'est ce que l'on voulait démontrer. ■

Définition : Soit G un système. On définit ip_G comme la plus petite équivalence sur G qui satisfait $(a, a^2) \in ip_G$.

Lemme 6.2 *Soit G un LI-système. Alors les conditions suivantes sont équivalentes pour deux éléments a, b dans G :*
(i) on a $(a, b) \in ip_G$;
(ii) il existe des entiers positifs k, l satisfaisants $a^k = b^l$.

DÉMONSTRATION : $(i) \Rightarrow (ii)$: La relation $(a, b) \in ip_G$ implique l'existence d'une suite $a = a_0, a_1, \ldots, a_n = b$, telle que l'on a $a_i = a_{i-1}^2$ ou $a_i^2 = a_{i-1}$, pour chaque i entre 1 et n. On montre par induction sur n, qu'il existe des entiers positifs k, l satisfaisants $a^k = b^l$. Le résultat est évident pour $n = 0$. Supposons $n \geqslant 1$. L'hypothèse d'induction donne qu'il existe k', l' satisfaisants $a^{k'} = a_{n-1}^{l'}$. Il y a deux possibilités maintenant :
- pour $b^2 = a_{n-1}$, on a $b^{l'+1} = (b^2)^{l'} = a_{n-1}^{l'} = a^{k'}$;
- pour $b = a_{n-1}^2$, on a $b^{l'} = (a_{n-1}^2)^{l'} = (a_{n-1}^{l'})^2 = (a^{k'})^2 = a^{k'+1}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Évident. ■

De même que dans le cas des treillis, on définit une congruence et un système simple.

Définition : Soit $(G, \cdot)$ un système binaire. Une équivalence θ sur G est appelée une *congruence* si elle satisfait la condition suivante :

$$(a, b) \in \theta \text{ et } (c, d) \in \theta \text{ entraîne } (a \cdot c, b \cdot d) \in \theta. \tag{6.2}$$

Le système G est dit *simple* s'il possède seulement deux congruences, à savoir id_G et $G \times G$.

Exemple 6.3 La relation ip_G n'est pas une congruence en général, par exemple

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	1	0	2
2	1	2	2

est un LI-système qui est simple : si on a $(0, 1) \in \theta$, alors on a $(2 \cdot 0, 2 \cdot 1) \in \theta$ et si on a $(2, a) \in \theta$ avec a dans $\{0, 1\}$, alors on a $(a \cdot 2, a \cdot a) \in \theta$. Pourtant, l'équivalence ip_G n'est pas triviale.

Par contre, si G est un LDLI-système, alors la relation ip_G est une congruence.

Proposition 6.4 *Pour chaque LDLI-système G, la relation ip_G est une congruence et, pour tous a, b, c dans G avec $(a, b) \in ip_G$, on a $ac = bc$.*

DÉMONSTRATION : Considérons $(a, b) \in ip_G$. Il existe k, l satisfaisant $a^k = b^l$. Maintenant, pour chaque c dans G, on a

$$a \cdot c = a^k \cdot c = b^l \cdot c = b \cdot c$$

$$(c \cdot a)^k = c \cdot a^k = c \cdot b^l = (c \cdot b)^l.$$

Ceci implique que ip_G est une congruence. Le résultat que $(a, b) \in ip_G$ entraîne $ac = bc$, pour tous c dans G, est maintenant évident. ■

Il est facile à voir, pour un LDLI-système G, que le quotient G/ip_G est un LDI-système et que toutes les classes d'équivalence satisfont l'identité constante à droite

$$x \cdot z = y \cdot z. \tag{RC}$$

De plus, les éléments des ces classes satisfont $a^k = b^l$.

Exemple 6.5 Considérons le LDLI-système suivant :

$\cdot$	0	1	2	3
0	1	1	3	2
1	1	1	3	2
2	3	3	2	1
3	2	2	1	3

La congruence ip_G a trois classes d'équivalence : $\{0, 1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$. Le quotient est isomorphe à l'unique quasi-groupe distributif à gauche à trois éléments.

Remarque 6.6 Kepka et Němec [37] ont montré la proposition 6.4 pour G un LDLI-système simplifiable à gauche. Ils ont aussi montré, dans le cas de LD-systèmes simplifiables à gauche, que l'identité LD est équivalente à l'identité

$$xx \cdot x = xx. \tag{6.3}$$

Ce résultat n'est pas vrai en général pour des LD-systèmes qui ne sont pas simplifiables à gauche, on le voit dans l'exemple suivant qui est LD, satisfait l'identité énoncée mais il n'est pas LI parce que l'on a $(1 \cdot 1) \cdot 0 \neq 1 \cdot 0$:

$\cdot$	0	1	2
0	1	2	2
1	1	2	2
2	2	2	2

6.2 Décomposition de LDLI-systèmes

Dans cette section on présente une construction qui permet de reconstruire les LDLI-systèmes à partir de LDI-systèmes et de RC-systèmes. Ensuite on classifie tous les LDLI-systèmes simples non idempotents. Le résultat de la proposition 6.4 suggère la définition suivante :

Définition : Un ensemble A est appelé une *algèbre mono-unaire* s'il est muni d'une opération unaire α. L'algèbre mono-unaire (A, α) et dit *connexe*, si, pour tous a, b dans A, il existe k, l satisfaisant $\alpha^k(a) = \alpha^l(b)$.

Exemple 6.7 Chaque algèbre mono-unaire (A, α) peut être représentée par un graphe orienté Γ dont les sommets sont A et les arêtes représentent α (voir la figure 6.1) : pour chaque sommet a de A, il existe une unique arête qui commence en a, à savoir l'arête de a vers $\alpha(a)$. Une algèbre mono-unaire est connexe si et seulement si son graphe est connexe.

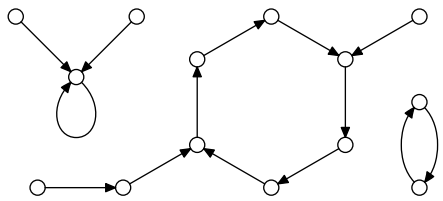


FIG. 6.1 – Une algèbre mono-unaire représentée par son graphe

Chaque RC-système G est muni de l'opération naturelle $o_G : a \mapsto a^2$ qui détermine entièrement la multiplication sur G. De l'autre coté, on peut bâtir sur chaque algèbre mono-unaire une structure d'un RC-système. On dit donc qu'un RC-système est *connexe* si l'algèbre mono-unaire correspondante est connexe. Si G est un LDLI-système, toutes les classes de ip_G sont des RC-systèmes connexes, d'après la proposition 6.4. Ceci nous permet de trouver une décomposition du système G.

Proposition 6.8 *(i) Soit H un LDI-système et soit A_a, avec $a \in H$, une famille d'ensembles deux à deux disjoints. Supposons qu'il existe des applications $f_{a,b}$ de A_b vers A_{ab}, pour tous a, b dans H. Définissons le système $B(H, f)$ comme l'ensemble $\bigcup_{a \in H} A_a$ avec l'opération $*$ définie par $x * y = f_{a,b}(y)$, pour x dans A_a et y dans A_b. Alors le système $B(H, f)$ est LI. De plus, si les applications $f_{a,b}$ satisfont l'identité*

$$f_{a,bc} \circ f_{b,c} = f_{ab,ac} \circ f_{a,c} \tag{6.4}$$

pour tous a, b et c dans H, alors le système $B(H, f)$ est LD.
(ii) Soit G un LDLI-système. Alors G est isomorphe à $B(G/ip_G, f)$, où on a $f_{\bar{a},\bar{b}} = ac$ et $\bar{a}$ désigne la classe de ip_G qui contient a.

DÉMONSTRATION : (i) Considérons a, b, c quelconques de H, et x dans A_a, y dans A_b et z dans A_c. L'élément $x * x = f_{a,a}(x)$ appartient aussi à A_a parce que H est idempotent. Donc on a $(x * x) * y = f_{a,b}(y) = x * y$. Pour la distributivité à gauche, on a

$$x * (y * z) = x * f_{b,c}(z) = f_{a,bc}(f_{b,c}(z)) = f_{ab,ac}(f_{a,c}(z))$$
$$(x * y) * (x * z) = f_{a,b}(y) * f_{a,c}(z) = f_{ab,ac}(f_{a,c}(z))$$

et donc $B(H, f)$ est un LDLI-système.

(ii) On remarque d'abord que la définition de $f_{\bar{a},\bar{b}}$ ne dépende ni du choix de a, d'après la proposition 6.4, ni du choix de b. On vérifie maintenant la condition (6.4), pour a, b, c dans G et d dans $\bar{c}$:

$$f_{\bar{a},\overline{bc}}(f_{\bar{b},\bar{c}}(d)) = f_{\bar{a},\overline{bc}}(bd) = a(bd) = (ab)(ad) = f_{\overline{ab},\overline{ac}}(ad) = f_{\overline{ab},\overline{ac}}(f_{\bar{a},\bar{c}}(d)).$$

Donc la construction donne un LDLI-système et on montre que ce système est isomorphe à $(G, \cdot)$. Choisissons a, b dans G, c dans $\bar{a}$ et d in $\bar{b}$. On a

$$c * d = f_{\bar{a},\bar{b}}(d) = a \cdot d = c \cdot d,$$

et ceci finit la démonstration. ■

Dans la suite, chaque élément du système $B(H, f)$ est noté par le couple (a, x) avec a dans H et x dans A_a.

Mentionnons que, pour chaque a dans G, on a l'égalité $f_{\bar{a},\bar{a}} = o_G$ sur la classe d'équivalence $\bar{a}$. Quand on considère a, b dans G, l'application $f_{\bar{a},\bar{b}}$ doit être un homomorphisme : l'égalité

$$f_{\bar{a},\bar{b}}(o_G(d)) = f_{\bar{a},\bar{b}}(f_{\bar{b},\bar{b}}(d)) = f_{\overline{ab},\overline{ab}}(f_{\bar{a},\bar{b}}(d)) = o_G(f_{\bar{a},\bar{b}}(d))$$

est vraie pour d quelconque dans $\bar{b}$.

Exemple 6.9 Soit H un LDI-système et soit A un RC-système connexe. Considérons, pour chaque a dans H, une copie disjointe de A, notée A_a. On définit l'application $f_{a,b}$ comme $d \mapsto o_{H_b}(d)$, pour chaque d dans A_b. Alors on a $(a, c) * (b, d) = (ab, f_{a,b}(d)) = (ab, o_{H_b}(d)) = (ab, cd)$ et on voit que le système $B(H, f)$ est isomorphe au produit $H \times A$.

Exemple 6.10 Soit G un RC-système. Alors G est aussi un LDLI-système et on a $ab = bb$ pour tous a et b dans G et, quand on note $\bar{a}$ et $\bar{b}$ les classes de ip_G qui contiennent a et b respectivement, on a $f_{\bar{a},\bar{b}} = f_{\bar{b},\bar{b}} = o_G$. Puisqu'il existe un unique RC-système idempotent pour chaque cardinalité, chaque RC-système G est déterminé par les classes de la congruence ip_G.

Remarque 6.11 Une décomposition similaire est décrite dans [35] pour les système distributifs à gauche symétrique à gauche, c'est-à-dire pour les système qui satisfont, à part de l'identité LD, aussi l'identité

$$x \cdot (x \cdot y) = y. \tag{LS}$$

On y montre aussi que chaque LSLD-système satisfait l'identité LI et donc notre décomposition est une généralisation de celle pour les LSLD-systèmes.

L'existence de la congruence ip_G permet de classifier tous les LDLI-systèmes non idempotents simples. Cette classification résulte directement des résultats sur LD-systèmes simples présentés dans [37], mais on le fait ici en utilisant une approche différente.

Définition : Le système $\mathrm{Cyc}_r(n)$, avec $n \geqslant 1$, est l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ avec l'opération $i \cdot j = j - 1$, pour $j > 0$, et $i \cdot 0 = n - 1$.
Le système $\mathrm{Path}_r(n)$, avec $n \geqslant 1$, est l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ avec l'opération $i \cdot j = j - 1$, pour $j > 0$, et $i \cdot 0 = 0$ (voir la figure 6.2).

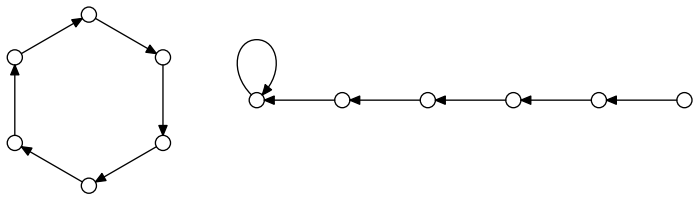


FIG. 6.2 – Les algèbres mono-unaires qui correspondent au système $\mathrm{Cyc}_r(6)$ (à gauche) et au système $\mathrm{Path}_r(6)$ (à droite).

Proposition 6.12 (Stanovský [45]) *Les seuls RC-systèmes simples sont, à l'isomorphisme près, le RC-système idempotent à deux éléments,* $\mathrm{Path}_r(2)$ *et* $\mathrm{Cyc}_r(p)$ *pour* p *premier.*

Proposition 6.13 *Les seuls LDLI-systèmes non idempotents simples sont, à l'isomorphisme près,* $\mathrm{Path}_r(2)$ *et* $\mathrm{Cyc}_r(p)$ *pour* p *premier.*

DÉMONSTRATION : La congruence ip_G sur un LDLI-système G n'est pas triviale, sauf si G est idempotent ou si G est un RC-système connexe. Les seuls RC-systèmes non idempotents simples sont, d'après la proposition 6.12, les systèmes $\mathrm{Path}_r(2)$ et $\mathrm{Cyc}_r(p)$. ■

6.3 LDLI-systèmes libres

Dans cette section, on va essayer de construire les LDLI-systèmes en utilisant la construction de la proposition 6.8. On ne saura pas montrer qu'ils sont libres mais on caractérisera de façons équivalentes leur liberté. On commence par les LDLI-systèmes monogènes. Il est évident que chaque LDLI-système monogène est un RC-système connexe. Il existe seulement un RC-système monogène infini, à l'isomorphisme près : l'ensemble $\mathbb{N}$ avec l'opération $a \wedge b = b + 1$ (voir la figure 6.3). Donc on en déduit :

Lemme 6.14 *Le système* $(\mathbb{N}, \wedge)$ *est isomorphe au LDLI-système libre monogène et aussi au RC-système libre monogène.*

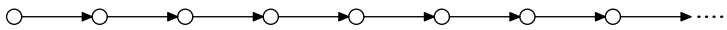


FIG. 6.3 – Le LDLI-système monogène infini

On commence maintenant à construire des LDLI-systèmes en plusieurs générateurs qui sont suspectés d'être les LDLI-systèmes libres. Dans le chapitre 5, proposition 5.25, on a montré (à une conjecture près) que deux termes sont LDLI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite. On montre maintenant une variante de cette proposition pour les carrés.

Lemme 6.15 *Soient t et t' deux termes LDI-équivalents qui ont la même hauteur à droite. Alors les termes $t \cdot t$ et $t' \cdot t'$ sont LDLI-équivalents.*

DÉMONSTRATION : Les termes $t \cdot t$ et $t' \cdot t'$ sont LDI-équivalents et ils sont la même hauteur à droite. D'après le lemme 5.22, il existe un mot w sur $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}$ et un entier k satisfaisant $t \cdot t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k} \bullet \mathrm{DI}_{w} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k} = t' \cdot t'$. On va montrer le résultat par induction sur k. Pour $k = 0$ le résultat est trivial.

Suppossons $k > 0$. On a $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{w} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k-1} = t'$. Maintant on fait disparaître tous les apparances de l'opérateur $\mathrm{D}_{\varnothing}$ de w. En regardant les LDI-relations on remarque que l'on peut bouger tous les $\mathrm{D}_{\varnothing}$ à gauche du mot w et tous les $\mathrm{D}_{\varnothing}^{-1}$ à droite de w. Maintant on a

$$\mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} = \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10}$$

puisque tous les deux opérateur envoient chaque terme t au terme $((t \cdot t) \cdot t) \cdot ((t \cdot t) \cdot t)$. Alors il existe un mot w_1 sur $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ et un mot w_2 sur $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}$ satisfaisant

$$t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_1} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k-1} = t'.$$

Maintenant le mot w_1 de même que le mot w_2 envoient le terme $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k}$ sur le terme $t' \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k}$. Alors on a aussi

$$t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_2} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k-1} = t'.$$

Mais on a

$$\mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_2} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k-1} = \mathrm{I}_{\varnothing}^{k} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k-1} = \mathrm{I}_{\varnothing}^{k} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k}.$$

Donc l'opérateur $\mathrm{I}_{\varnothing}^{k-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-k+1}$ envoie le terme $t \cdot t$ sur le terme $t' \cdot t'$ et le reste résulte de l'induction. ■

On va construire les LDLI-systèmes suspectés libres à partir des LDI-systèmes libres et du système $(\mathbb{N}, \hat{}\,)$. La classe de la LDLI-équivalence d'un terme t va être codé par le couple d'un élément du LDI-système libre, à savoir par la classe de la LDI-équivalence de l'élément t et d'un nombre de $\mathbb{N}$ qui va exprimé la différence entre la hauteur à droite de t et la hauteur à droite minimale dans la classe de la LDI-équivalence.

On note FLDI_X le LDI-système libre engendré par X, c'est-à-dire l'ensemble T_X quotienté par $\overset{\text{LDI}}{=}$, et on note $[t]$ la classe de l'équivalence $\overset{\text{LDI}}{=}$ associé au terme t. On définit la

hauteur à droite de chaque élément $[t]$ de FLDI_X comme la hauteur à droite minimale d'un terme t' qui est LDI-équivalent au terme t. Considérons maintenant, pour chaque $[t]$ dans FLDI_X, une copie disjointe de $(\mathbb{N}, \wedge)$, notée $\mathbb{N}_{[t]}$. Pour tous $[t], [s]$ dans FLDI_X, on définit $f_{[t],[s]}(a) = a + \mathrm{rht}([s]) - \mathrm{rht}([t \cdot s]) + 1$. On a $f_{[t],[s]}(a) \geqslant a$ pour chaque a dans $\mathbb{N}$ et donc $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ est un LI-système.

Lemme 6.16 *Le système $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ défini plut haut est un LDLI-système.*

DÉMONSTRATION : On doit montrer que c'est un LD-système, c'est-à-dire que les applications $f_{a,b}$ satisfont la condition (6.4). Pour tous termes t_1, t_2, t_3 et chaque a dans $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} f_{[t_1],[t_2 \cdot t_3]} \circ f_{[t_2],[t_3]}(a) &= f_{[t_1],[t_2 \cdot t_3]}(a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_2 \cdot t_3]) + 1) \\ &= a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_2 \cdot t_3]) + 2 \\ &= a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([(t_1 \cdot t_2) \cdot t_1 \cdot t_3]) + 2, \\ &= f_{[t_1 \cdot t_2],[t_1 \cdot t_3]}(a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_3]) + 1) \\ &= f_{[t_1 \cdot t_2],[t_1 \cdot t_3]} \circ f_{[t_1],[t_3]}(a) \end{aligned}$$

et donc le système $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ est LDLI. ■

On ne sait pas montrer que ce système est libre mais on sait exprimer cette propriété différemment :

Proposition 6.17 *Soit X un ensemble de variables. Les résultats suivants sont équivalents :*
(i) Deux termes t et t' de T_X sont LDLI-équivalents s'ils sont LDI-équivalents et ils ont la même hauteur à droite.
(ii) Le système $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ est isomorphe au système libre engendré par X.
(iii) Soit G le LDLI-système libre engendré par X, alors chaque classe de l'équivalence ip_G est un système simplifiable à gauche.
(iv) Deux termes t et t' de T_X sont LDLI-équivalents si les termes $t \cdot t$ et $t' \cdot t'$ sont LDLI-équivalents.
(v) La relation $\overset{\mathrm{LDLI}}{=}$ sur T_X est l'intersection des relations $\overset{\mathrm{LDI}}{=}$ et $\overset{\mathrm{RC}}{=}$.

DÉMONSTRATION : $(i) \Rightarrow (ii)$ L'ensemble T_X quotienté par l'équivalence $\overset{\mathrm{LDLI}}{=}$ est le LDLI-système libre sur X. On note $\bar{t}$ la classe de LDLI-équivalence qui contient t. On définit l'application h comme $\bar{t} \mapsto ([t], \mathrm{rht}(t) - \mathrm{rht}([t]) + 1)$. Cette application est évidemment surjective et, d'après (i) elle est injective. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un homomorphisme. On a

$$\begin{aligned} h(t_1) * h(t_2) = ([t_1], \mathrm{rht}(t_1) - \mathrm{rht}([t_1]) + 1) * ([t_2], \mathrm{rht}(t_2) - \mathrm{rht}([t_2]) + 1) = \\ = ([t_1 \cdot t_2], \mathrm{rht}(t_2) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_2]) + 2) = h(t_1 \cdot t_2). \end{aligned} \quad (6.5)$$

L'application h est donc un isomorphisme entre le LDLI-système libre engendré par X et le système $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Les classes de ip_G sont des copies de $\mathbb{N}$ et donc simplifiables à gauche. $(iii) \Rightarrow (iv)$ Les termes t et t' sont LDI-équivalents et donc on a $t \cdot t \overset{\text{LDLI}}{=} t \cdot t'$. Par simplification on obtient $t \overset{\text{LDLI}}{=} t'$. $(iv) \Rightarrow (i)$ Les termes t et t' sont LDI-équivalents et, d'après le lemme 6.15, on a $t \cdot t \overset{\text{LDLI}}{=} t' \cdot t'$. Le reste résulte du résultat (iv). $(i) \Longleftrightarrow (v)$ Il est facile de voir par induction que deux termes sont RC-équivalents si et seulement s'ils ont la même hauteur à droite et la même variable la plus à droite. ■

On ne sait pas pour l'instant aucun des résultats de la proposition 6.17. Mais ce résultat, s'il est vrai, pourrait se traduire en disant que la classe des LDLI-systèmes est la plus petite classe qui contient à la fois les LDI-systèmes et les RC-systèmes. On a même montré que chaque LDLI-système s'obtient comme une expansion d'un LDI-système par des RC-systèmes. Les RC-systèmes ont une structure assez simple et donc étudier les LDLI-systèmes, ça pourrais revenir à étudier les LDI-systèmes ; beaucoup de problèmes seraient équivalents pour LDI et pour LDLI, par exemple le problème de mots des systèmes libres. Même maintenant, grâce à la proposition 6.15 on sait qu'une solution du problème de mots de LDLI donnerait une solution du problème de mot pour LDI : considérons deux termes t, t' avec $\mathrm{rht}(t) \leqslant \mathrm{rht}(t')$ et notons $k = \mathrm{rht}(t') - \mathrm{rht}(t)$; alors les termes $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1}$ et $t' \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}$ sont LDI-équivalents si et seulement s'ils sont LDI-équivalents, d'après la proposition 6.15.

La relation $\overset{\text{LDLI}}{=}$ est téoriquement plus difficile à résoudre que la relation $\overset{\text{LDI}}{=}$ mais l'avantage de la famille LDLI est qu'il existe des structures associées qui sont plus commodes pour certaines approches que les structures analogues pour LDI. Par exemple, on a étudié dans le chapitre 5 les monoïdes syntaxiques et on a montré que le monoïde syntaxique pour LDLI a des bonnes propriétés qui sont improbables de trouver dans un monoïde analogue associé à la famille LDI.

Bibliographie

[1] G. Birkhoff : « Lattice theory », third edition ; Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 25, Amer. Math. Soc. : Providence, R.I., 1967

[2] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee : *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups,* Advances in Math. **139**, 1998, 322–353

[3] A. Björner : *Orderings of Coxeter groups.* C. Greene (ed.), Cont. Math. 34, Amer. Math. Soc. : Providence, R.I., 1984, 175–195

[4] N. Bourbaki : « Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6 » ; Éléments de mathématiques, Fasc. XXXIV ; Hermann : Paris, 1968

[5] E. Brieskorn, K. Saito : *Artin Gruppen un Coxeter Gruppen,* Invent. Math. **17**, 1972, 245–271

[6] S. N. Burris, H. P. Sankappanavar : « A Course in Universal Algebra », Grad. texts in Math., Springer-Verlag, 1981

[7] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry : « Introductory Notes to Richard Thompson's Groups », L'Enseignement Mathématique **42**, 1996, 215–256

[8] N. Caspard, C. Le Conte de Poly-Barbut, M. Morvan : *Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded,* preprint

[9] F. du Cloux : *A transducer approach to Coxeter groups,* J. of Symbolic Computation **27**, 1999, 1–14

[10] P. Dehornoy : *The structure group for the associativity identity,* J. of Pure and Appl. Algebra **111**, 1996, 59–82

[11] P. Dehornoy : *Gaussian groups are torsion free,* J. of Algebra **210**, 1998, 291–297

[12] P. Dehornoy : « Braids and Self-Distributivity » ; Prog. in Math. **192** ; Birkhäuser, 2000

[13] P. Dehornoy : *The fine structure of LD-equivalence,* Adv. in Math., **155**, 2000, 264–316

[14] P. Dehornoy : *Groupes de Garside,* Ann. Sci. Norm. Super., 2002, 267–306

[15] P. DEHORNOY : *Study of an identity*, Alg. Univ. **48**, 2002, 223–248

[16] P. DEHORNOY : *Complete positive group presentation,* J. of Alg. **268**, 2003, 156–197

[17] P. DEHORNOY, L. PARIS : *Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups,* Proc. London Math. Soc. **79-3**, 1999, 569–604

[18] V. DEODHAR : *A splitting criterion for the Bruhat orderings on Coxeter groups.* Comm. in Algebra **15 (9)**, 1987, 1889–1894

[19] A. DRÁPAL : *Finite left distributive algebras with one generator*, Journal of Pure and Appl. Alg., **121**, 1997, 233–251

[20] A. DRÁPAL, T. KEPKA, M. MUSÍLEK : *Group Conjugation has Non-Trivial LD-Identities,* Comment. Math. Univ. Carol., 1994, 596–606

[21] R. FREESE, J. JEŽEK, J. B. NATION : « Free Lattices », Math. Surveys and Monographs 42, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995

[22] F. A. GARSIDE : *The braid group and other groups,* Quart. J. Math. Oxford **20**, 1969, 235–254

[23] M. GECK, G. PFEIFFER : « Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras » ; London Math. Soc. Monographs **21** ; Oxford Univ. Press, 2000

[24] E. GODELLE : *Parabolic subgroups of Garside groups,* preprint, arXiv GR/0402389

[25] G. GRÄTZER : « General lattice theory », Second ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

[26] G. GRÄTZER, E. T. SCHMIDT : *Finite Lattices with Isoform Congruences,* Tatra Mountain Math. Publ. **27**, 2003, 111-124

[27] J. E. HUMPHREYS : « Reflection groups and Coxeter groups » ; Cambridge Univ. Press : Cambridge, 1976

[28] P. JEDLIČKA : *Prezentace s doplňky a levá distributivita* (tchèque), mémoire DEA, université Charles de Prague ; Prague, 2001

[29] P. JEDLIČKA : *A Combinatorial Construction of the Weak Order of a Coxeter Group,* à paraître dans Comm. in Alg.

[30] P. JEDLIČKA : *On Left Distributive Left Idempotent Groupoids*, à paraître dans Comm. Math. Univ. Carol.

[31] P. JEDLIČKA : *Semidirect products of lattices,* preprint

[32] P. JIPSEN, H. ROSE : « Varieties of Lattices », Lecture Notes in Math. **1533**, Springer-Verlag, 1992

[33] D. JOYCE : *A Classifying Invariant of Knots, the Knot Quandle,* Journal of Pure and Applied Algebra **23**, 1982, 37–65

[34] T. KEPKA : *Notes On Left Distributive Groupoids,* Acta Univ. Carolinae – Math. et Phys. **22.2**, 1981, 23–37

[35] T. KEPKA, *Non-idempotent left symmetric left distributive groupoids,* Commentat. Math. Univ. Carol. **35.1**, 1994, 181–186

[36] T. KEPKA, P. NĚMEC : *Semidistributive groupoids,* Rapport de recherche 1999-9, Université de Caen, 1999.

[37] T. KEPKA, P. NĚMEC : *Selfdistributive Groupoids Part A1 : Non-Idempotent Left Distributive Groupoids,* Acta Univ. Carolinae - Math. et Phys. **44.1**, 2003, 3–94

[38] D. LARUE : *Left-Distributive Idempotent Algebras,* Commun. Alg. **27/5**, 1999, 2003–2009

[39] R. LAVER : *The left distributiv law and the freeness of an algebra of elementary embeddings,* Adv. in Math., **91-2**, 1992, 209–231

[40] C. LE CONTE DE POLY-BARBUT : *Sur les treillis de Coxeter finis,* Math. Inf. Sci. Hum. **125**, 1994, 41–57

[41] C. LE CONTE DE POLY-BARBUT : *Treillis de Cayley des groupes de Coxeter finis. Constructions par récurrence et décompositions sur des quotients,* Math. Inf. Sci. Hum. **140**, 1997, 11–33

[42] M. PICANTIN : *Petits groupes gaussiens,* thèse en sciences, 129 pages, 2000, Caen

[43] L. PROCHÁZKA : « Algebra », Academia, 1990, Prague

[44] D. STANOVSKÝ : *Left distributive groupoids,* mémoire de DEA, université Charles de Prague ; Prague, 2001

[45] D. STANOVSKÝ : *Homomorphic images of subdirectly irreducible algebras*, thèse de competition, 2001,
`http ://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/math/publ.htm`

[46] D. STANOVSKÝ : *On Equational Theory of Group Conjugation,* soumis à Contr. Gen. Alg. **15**, 2003