Poděkování

Chtěl bych ze všeho nejdříve poděkovat svému francouzskému školiteli Patricku Dehornoovi za to, že vedl má studia, za jeho rady a pomoc a hlavně za jeho trpělivost při opravování mých chyb ve francouzštině, když se snažil zlepšit čitelnost mých textů. Chtěl bych také poděkovat mému českému školiteli Aleši Drápalovi, za to, že jsem mohl být jeho studentem a za jeho rady a připomínky, nejen ohledně této práce.

Jsem velice vděčný Brunovi Leclercovi a Petru Němcovi, kteří svolili číst a oponovat moji práci. Chtěl bych jim též poděkovat, stejně jako Tomáši Kepkovi a Friedrichu Wehrungovi za to, že přijali pozvání stát se členy komise u obhajoby.

Chtěl bych zároveň poděkovat Univerzitě v Caen a Karlově Univerzitě v Praze, které byly základnami mého vzdělávání během minulých tří let, stejně jako všem ostatním organizacím, díky kterým jsem mohl studovat souběžně v Čechách a ve Francii.

Chtěl bych také poděkovat všem členům laboratoře LMNO v Caen, Katedry Algebry v Praze a všech ostatních laboratoří, které mě pozvaly, abych prezentoval své výsledky. Mezi těmito bych jmenovitě poděkoval Eddymu Godellovi, Marianu Kechlibarovi, Tomáši Kepkovi, Bernardu Leclercovi, Claude Le Conte de Poly-Barbut, Matthieu Picantinovi, Hervému Sibertovi, Davidu Stanovskému, Philippu Toffinovi a Friedrichu Wehrungovi za konzultace s nimi vedené a za jejich připomínky během mých doktorských studií.

V neposlední řadě bych chtěl poděkovat své manželce Lucii, která mě podporovala během celé té doby a která mě dodávala vůli a energii pokračovat v práci.

Obsah

Úvod

Tento text sestává ze dvou částí, a to ze studia semidirektních součinů svazů a jejich užití v Coxeterových grupách a v Garsidových monoidech a ze studia volných levodistributivních idempotentních grupoidů (LDI grupoidů), jejichž prvky jsou třídy ekvivalence strukturované jako částečně uspořádané množiny. To, co tyto dost nezávislé části spojuje, je pojem svazu a konfluence a obecněji typ kombinatorické a algebraické argumentace, který bývá použit.

V první části se soustředíme na pojem semidirektního součinu svazů, což je analog pojmu semidirektní sočin grup, přetáhnutý do světa svazů. Stejně jako u grup existuje vnitřní a vnější verze semidirektního součinu, přičemž ta vnější se konstruuje pomocí akce jednoho svazu na druhém. Direktní součin odpovídá semidirektnímu, u kterého je akce triviální. Poněvadž svazy vlastní dvě základní operace (průsek a spojení), je potřeba a priori dvou zobrazení z prvního svazu do množiny endomorfismů druhého. Ve skutečnosti stačí pouze jedno zobrazení, které plně určuje uspořádání na svazu a tedy i ono druhé zobrazení.

Kapitola 1 této práce popisuje konstrukci semidirektního součinu svazů a semidirektního součinu polosvazů (struktury, kde je definována jen jedna svazová operace). Zkoumáme podrobněji některé příklady a dokážeme například v tvrzení 1.15, že v případě diskrétních svazů (čili speciálně i v případě konečných svazů) stačí umět spočítat množinu trojic zvaných speciální, abychom uměli rekonstruovat celý semidirektní součin. Tyto trojice kódují v jistém smyslu relaci bezprostředního následníka v součinu. Jiným výsledkem je charakterizace nejmenší třídy svazů uzavřené na semidirektní součiny:

Tvrzení 1.25 *Buď L konečný svaz. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(*i*) *svaz L náleží nejmenší třídě, která obsahuje dvouprvkový svaz a která je uzavřená na podsvazy, semidirektní součiny a izomorfní obrazy;*
(*ii*) *svaz L neobsahuje žádný podsvaz, který se zobrazuje na nějaký jednoduchý svaz;*
(*iii*) *svaz L náleží nejmenší třídě, která obsahuje dvouprvkový svaz a která je uzavřená na podsvazy, na krátké exaktní sekvence a na izomorfní obrazy;*
(*iv*) *svaz L náleží nejmenší třídě, která je uzavřená na podsvazy a na homomorfní součiny a která neobsahuje žádný jednoduchý svaz.*

Kapitola 2 popisuje použití semidirektního součinu svazů v Coxeterových grupách.

Toto použití je vlastně výchozí bod práce a hlavní motivace proč byl definován semidirektní součin svazů. Coxeterovy grupy jsou třída grup, která obsahuje symetrické grupy a obecněji grupy zrcadlení afiních prostorů a jsou objektem mnoha prací [27], [4] nebo [5]. Každá Coxeterova grupa W je vybavena částečným úspořádáním, které se nazývá *slabé uspořádání* $\preccurlyeq$ a které tvoří polosvaz u všech Coxeterových grup nebo dokonce svaz v případě, že je W konečná. Naším cílem je popsat explicitně konstrukci tohoto (polo)svazu a zde se využívá semidirektní součin svazů. Mezi všemi podgrupami Coxeterovy grupy existují podgrupy zvané *parabolické,* které jsou samy Coxeterovými grupami a které jsou generovány podmnožinami množiny kanonických generátorů grupy W. Je-li W_J parabolická podgrupa, existuje přirozený rozklad prvků W vztažený k W_J a ukazuje se, že tento rozklad dává kongruenci (polo)svazu slabého uspořádání na W. Navíc, třídy této kongruence jsou izomorfní a mají strukturu podsvazů. Dokážeme následující obecné tvrzení:

Věta 2.10 *Buď (W,S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Označme W_J podgrupu grupy W generovanou množinou J a W^J levou rozkladovou třídu k W_J. Pak je polosvaz $(W,\preccurlyeq)$ izomorfní nějakému semidirektnímu součinu $(W_J,\preccurlyeq)$ a $(W^J,\preccurlyeq)$.*

Tento výsledek je navíc natolik efektivní, že umožňuje, ve velkém množství případů, úplně popsat uvažované semidirektní součiny tím, že spočítáme všechny speciální trojice. Zabýváme se též konkrétnímy typy, a to A_n, B_n, D_n, I_m, a též $\tilde{A}_2$: pro každou z nekonečných řad se svaz slabého uspořádání konstruuje induktivně z předcházející grupy dané řady

V literatuře existují jiné případy rozkladů slabého uspořádání [41], [23]. Náš výsledek je specifický v tom, že umožňuje induktivně konstruovat polosvazy (ty větší z menších, které už jsou známy) a není to pouze rozklad (vyjádření prvků velkého polozvazu pomocí menších polosvazů). Navíc se zdá, že se dosud uvažovaly pouze konečné Coxeterovy grupy, zatímco náš přístup funguje rovněž pro ty nekonečné.

Kapitola 3 je věnována studiu svazů dělitelnosti v Artinových a v Garsidových monoidech. Ke každé Coxeterově grupě se přiřazuje grupa zvaná Artinova, jejíž prezentace se dostane z prezentace příslušné Coxeterovy grupy odstraněním torzních relací $s^2 = 1$, a monoid stejné prezentace. Je-li grupa W konečná, a označíme-li M odvozený Artinův monoid, existuje přirozený surjektivní homomorfismus z M na W a zároveň existuje kanonická množinová sekce tohoto homomorfismu. Obraz při této sekci prvku w_0 grupy W je prvek Δ monoidu M jehož vlastnosti jsou důležité a, speciálně, dělitelé prvku Δ v monoidu M tvoří svaz, který je izomorfní svazu slabého uspořádání na W. Studujeme zde svazy, které se objevují jako svazy dělitelů prvků Δ^k a taktéž svaz dělitelnosti monoidu M:

Tvrzení 3.11 *Buď M ireducibilní Artinův monoid sférického typu, který má alespoň dva atomy. Pak je svaz dělitelnosti na M jednoduchý.*

Pojem Artinových monoidů se zobecňuje na pojem Garsidových monoidů, definovaných jako monoidy vlastnící prvek znaný *Garsidův prvek,* jehož dělitelé tvoří svaz [17].

Popisujeme zde příklady Garsidových monoidů M, kde se svaz dělitelů minimálního Garsidova prvku Δ monoidu M obdrží jako semidirektní součin svazu dělitelů minimálního Garsidova prvku δ nějakého podmonoidu monoidu M a svazu dělitelů Δ, kteří jsou nesoudělní s δ.

Druhá část této práce se věnuje studiu levé distributivity v přítomnosti idempotence. Levá distributivita je algebraická rovnost LD: $x(yz) = (xy)(xz)$, a idempotence je algebraická rovnost I: $x = xx$. O LD grupoidech, tzn. algebrách s jednou binární relací splňující identitu LD, byly hodně publikováno v minulých letech, například Dehornoy [13], Drápal [19], Kepka [34] nebo Laver [39]. *LDI grupoid* je LD grupoid, který splňuje navíc identitu I. Základní problém, když se studuje grupoid splňující nějakou algebraickou identitu či vícero identit, je *problém slov,* tj. otázka jak algoritmicky rozhodnout, zda jsou dva abstraktní výrazy zapsané pomocí proměnných a operace (čili jednoduše řečeno *termy*) rovny *modulo* uvažované identity. Vyřešit tuto otázku znamená vlastně konkrétně popsat volné algebry rovnicové variety definované těmito identitami.

V případě identity LD byla tato otázka zodpovězena pozitivně v [12] a existuje dokonce více metod, které rozeznají, jsou-li nebo ne dva termy LD ekvivalentní. V případě LDI, tj. když přidáme idempotenci, je tato otázka stále otevřena – a stále jí zůstává. Na výsledky přinesené v této práci může být nahlíženo jako na částečné výsledky na cestě k řešení problému slov, které stále zbývá nalézt.

Kapitola 4 zavádí základní pojmy nutné ke studiu LDI, tzn. k popisu ekvivalence na termech indukované identitami LD a I. Základní myšlenkou je sledovat metody vyvinuté v [12] pro identitu LD a zkoušet je rozšířit pro LDI, což *není* okamžitě vidět. Zdá se být přirozené zavést jistou variantu idempotence, a to identitu LI: $(x \cdot x) \cdot y = x \cdot y$ a vést výzkum paralelně pro LDI a pro LDLI.

Jeden ze známých výsledků pro LD je, že každá třída ekvivalence pro LD má strukturu svazového typu (zda se jedná o opravdový svaz zůstává obecně otázkou): zavádíme orientovaný pojem *LD expanze,* který zjemňuje LD ekvivalenci a jeden z nejdůležitějších technických výsledků je *konfluence,* což značí, že dva termy jsou LD ekvivalentní právě tehdy, když mají společnou LD expanzi. Tento výsledek byl dokázán Laruem [38] rovněž pro případ LDI. Zopakujeme tento důkaz a dokážeme obdobný výsledek pro LDLI:

Tvrzení 4.12 *Dva termy jsou LDLI ekvivalentní tehdy a jen tehdy, když mají společnou LDLI expanzi.*

Otázka řešení problému slov pro nějakou skupinu identit, například pro LDI nebo LDLI, znamená umět dokázat, kdy dva termy *nejsou* ekvivalentní: ve skutečnosti, pokud jsou dva termy ekvivalentní, můžeme to vždy zjistit postupným vyčíslováním všech ekvivalentních termů a zkoumáním, zda se náš term objevil na seznamu. Existují dva typy method jak dokázat, že dva termy t, t' nejsou ekvivalentní: sémantická metoda, která spočívá v konstrukci příkladu grupoidu S, který splňuje uvažované identity a při dosazení de t a t' se dostanou různé hodnoty; a metoda syntaktická, při které se naleznou čistě formální kritéria, která dokážou, že t a t' nemohou být ekvivalentní. Například v případě LDI, obě identity zachovávají nejpravější a nejlevější proměnné a tedy, pokud nejpravější a nejlevější proměnné v t a v t' nejsou shodné, tyto termy nemohou být LDI ekvivalentní. To, co bychom rádi, je najít dostatečně jemná kritéria, abychom uměli oddělit všechny neekvivalentní termy, což by znamenalo umět vyřešit problém slov. V případě LDI (a LDLI), nemáme zatím takového kritéria, nicméně dokážeme částečný výsledek, který umožňuje syntakticky oddělit termy, které jsme doposud neuměli syntakticky oddělit. Znění využívá jistého pojmu zvaného *řez* termu.

Věta 4.29 *Jsou-li t, t' LDI ekvivalentní, pak každý řez termu t' leží v množině* $\mathrm{Cut}(t)$.

Předvedeme netriviální příklady využití tohoto kritéria tím, že jej dáme dohromady s pojmem váhy proměnných termu.

V páté kapitole studujeme geometrické monoidy identit LDI a LDLI. Pro každou skupinu algebraických identit existuje monoid, který popisuje relaci ekvivalence termů jako orbity akce jistého monoidu operátorů [15]. V případě asociativity dostaneme v podstatě Thompsonovu grupu F [10] a v případě asociativity s komutativitou dostaneme v podstatě Thompsonovu grupu V [7]. V případě levé distributivity LD je geometrický monoid extenzí Artinovy grupy B_∞ a studium tohoto monoidu umožnilo nalézt řešení problému slov pro LD a dalších souvisejících otázek [12]. Je tedy přirozené chtít zkoumat geometrické monoidy pro skupiny LDI a LDLI doufaje, že se podaří vyřešit problém slov. V případě LD sestávalo řešení ze čtyř etap: zavedení syntaktického monoidu – monoidu, který splňuje nejzákladnější relace geometrického monoidu; důkaz konfluence v syntaktickém monoidu, což vlastně znamená dokázat, že každý prvek podílové grupy syntaktického monoidu lze zapsat ve formě uv^{-1}, kde u i v leží v syntaktickém monoidu; vyřešení problému slov syntaktického monoidu; a konstrukce injektivního zobrazení z množiny tříd LD ekvivalence do syntaktické grupy. Podaří se nám dokončit první dvě etapy tohoto přístupu pro LDI a první tři etapy pro LDLI. Hlavní výsledky jsou následující:

Tvrzení 5.41 *Každý prvek podílové groupy syntaktického monoidu pro LDI (respektive pro LDLI) lze zapsat jako uv^{-1}, kde u a v náleží do pozitivního syntaktického monoidu pro LDI (respektive pro LDLI).*

Tvrzení 5.46 *Syntaktický monoid pro LDLI je zleva kratitelný, každá dvojice prvků má nejmenší společný pravý násobek a největšího společného levého dělitele a problém slov tohoto monoidu se dá řešit metodou převracení slov.*

Kapitola 6 obsahuje výsledky týkající se LDLI grupoidů, tj. grupoidů splňujících jak LD, tak i LI, Popíšeme jistý rozklad LDLI grupoidů, který umožňuje rekonstruovat LDLI grupoidy pomocí LDI grupoidů a grupoidů pravých konstant, což jsou grupoidy splňující identitu $x \cdot z = y \cdot z$. Využijeme tohoto ke konstrukci volných LDLI grupoidů pomocí volných LDI grupoidů a vyvodíme z toho tvrzení ekvivalentní tvrzení, že dva termy jsou LDLI ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jsou-li LDI ekvivalentní a mají-li stejnou pravou výšku, což je délka nejpravější větve, díváme-li se na termy jako na binární stromy.

Jestliže platí předchozí výsledek, pak by řešení problému slov pro LDLI dalo i řešení problému slov pro LDI a naopak. Jiným důsledkem by bylo, že rovnicová varieta generovaná LDLI je nejmenší varietou obsahující třídu LDI grupoidů a třídu grupoidů pravých konstant.

Některé výsledky z této práce už byly publikovány odděleně. Definice semidirektního součinu je součástí diplomové práce autora [28]. Článek [29] obsahuje přibližně kapitolu 1 této práce. Článek [31] popisuje konstrukci slabého uspořádání na Coxeterových grupách pomocí semidirektního součinu polosvazů. A článek [30] je přibližně kopií kapitoly 6.

Část I

Součiny svazů

Kapitola 1

Semidirektní součiny svazů

Semidirektní součin svazů je konstrukce inspirovaná semidirektním součinem grup. V jednom směru má svaz, který dostaneme jako semidirektní součin dvou menších svazů, kanonickou kongruenci, která umožňuje nalézt výchozí menší svazy, jeden jako faktor, druhý jako jednu z tříd ekvivalence. V druhém směru můžeme téměř každý svaz, který vlastní kongruenci mající všechny třídy ekvivalentní, zkonstruovat jako semidirektní součin faktoru a jedné třídy zmiňované kongruence.

Tato kapitola obsahuje pět sekcí. V sekci 1 definujeme semidirektní součin svazů pomocí dvou funkcí, které zachycují svazové operace spojení a průseku. V sekci 2 studujeme tyto funkce, abychom dokázali, že pouze jedna z nich stačí pro konstrukci semidirektního součinu. V sekci 3 definujeme semidirektní součin polosvazů. V sekci 4 dokážeme, že libovolný svaz s libovolnou kongruencí θ se vnořuje do nějakého semidirektního součinu, jehož kanonická kongruence rozšiřuje kongruenci θ. Nakonec v sekci 5 studujeme třídu Konečných svazů uzavřenou na semidirektní součiny.

1.1 Semidirektní součin svazů

V této sekci popíšeme konstrukci semidirektního součinu svazů. Začněme připomenutím semidirektního součinu grup: buď G grupa, K její podgrupa a H její normální podgrupa splňující $KH = G$ a $K \cap H = \emptyset$. Definujeme zobrazení φ z K do $\mathrm{Aut}(H)$ takové, že množina $K \times H$ s operací $\bullet$ definovanou jako

$$(k_1, h_1) \bullet (k_2, h_2) = (k_1 \cdot k_2, h_1 \cdot \varphi(k_1)(h_2)), \tag{1.1}$$

je izomorfní grupě G.

Rádi bychom vytvořili analogickou konstrukci v případě svazů. Bohužel, svazy mají jiné vlastnosti než grupy; neexistuje například „normální podsvaz“, musíme mluvit o kongruencích.

Definice: Buď L svaz a buď θ relace ekvivalence na L. Řekneme, že θ je *kongruence* svazu L, jestliže je θ kompatibilní s oběma svazovými operacemi, tj. máme-li, pro všechna a, b, c, d v L,

$$\text{z } (a,b) \in \theta \text{ a } (c,d) \in \theta \text{ vyplývá } (a \vee c, b \vee d) \in \theta, \tag{1.2}$$
$$\text{z } (a,b) \in \theta \text{ a } (c,d) \in \theta \text{ vyplývá } (a \wedge c, b \wedge d) \in \theta. \tag{1.3}$$

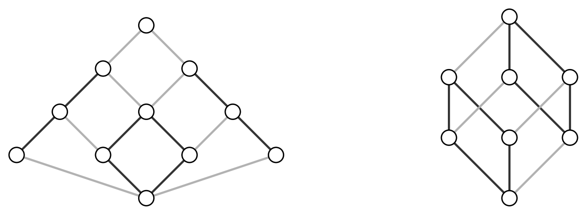
Faktorový svaz $L/_\theta$ je množina tříd kongruence $[a]_\theta$, pro a v L, se svazovými operacemi $\vee$ a $\wedge$, definovanými jako $[a]_\theta \vee [b]_\theta = [a \vee b]_\theta$ a $[a]_\theta \wedge [b]_\theta = [a \wedge b]_\theta$.

Každá kongruence grupy G je vázána na normální podgrupu – podgrupa K je třídou kongruence a ostatní třídy jsou kopie podgrupy K pomocí translací. Naproti tomu, třídy kongruence svazu L jsou vždy podsvazy, ale nemají obecně nic společného. A tak prvním krokem zobecňování je představení kongruence jejíž třídy jsou stejné.

Definice [26]: Buď L svaz a buď θ kongruence na L. Řekneme, že kongruence θ na L je *izoformní* pokud jsou třídy θ po dvou navzájem izomorfní svazy.

Definice: *Hasseův diagram* svazu $(L, \leqslant)$ je graf jehož vrcholy jsou prvky svazu L a jehož hrany vyznačují uspořádání $\leqslant$ na L : hrana stoupá z a do b, když máme $a < b$ a když neexistuje žádný prvek c splňující $a < c < b$.

Příklad 1.1 Na obrázku 1.1 vidíme dva Hasseovy diagramy svazů a v každém z nich je vyznačena jedna kongruence. Kongruence svazu $C(\mathbf{4})$ má čtyři třídy ekvivalence, které nejsou izomorfní, poněvadž mají různý počet prvků; tato kongruence tedy není izoformní. Naproti tomu, kongruence svazu $\mathcal{P}(3)$ je izoformní.



Obrázek 1.1: Svazy $C(\mathbf{4})$ a $\mathcal{P}(3)$, každý s jednou kongruencí: prvky, které náleží do stejné třídy ekvivalence jsou spojeny černými hranami.

Předpokládejme, že je L svaz s izoformní kongruencí θ. Označme K faktor $L/_\theta$ a H libovolnou třídu kongruence θ. Pro každý prvek a svazu L značíme $\bar{a}$ třídu ekvivalence prvku a. Označme $\eta_{\bar{a}}$ izomorfismus $\bar{a} \to H$. Pak je zobrazení $a \mapsto (\bar{a}, \eta_{\bar{a}}(a))$ bijekcí mezi množinou L a množinou $K \times H$. Díky této bijekci nebudeme ve zbytku textu rozlišovat mezi množinou K a množinou $K \times H$.

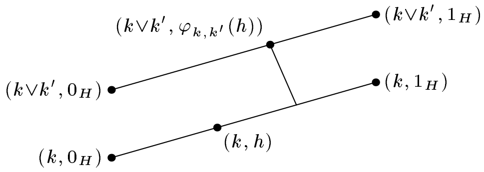
Naším cílem je vybavit množinu $K \times H$ dvěma binárními operacemi, řekněme $\sqcup$ a $\sqcap$ tak, aby byl svaz $(K \times H, \sqcup, \sqcap)$ izomorfní svazu $(L, \vee, \wedge)$. V teorii grup je operace $\cdot$ kódována zobrazením φ. V případě svazů máme dvě operace, a budeme tudíž potřebovat dvě zobrazení φ a ψ, abychom zakódovali tyto dvě operace.

Předpokládejme, že existuje 0_H, nejmenší prvek svazu H, a 1_H, největší prvek svazu H. Definujme zobrazení φ a ψ z $K \times K$ do H^H následujícími rovnostmi: (připomínáme, že množina $K \times H$ je identifikována s množinou L, a tedy, že operace $\vee, \wedge$ jsou ty ze svazu L):

$$(k, h) \vee (k \vee k', 0_H) = (k \vee k', \varphi(k, k')(h)), \tag{1.4}$$

$$(k, h) \wedge (k \wedge k', 1_H) = (k \wedge k', \psi(k, k')(h)). \tag{1.5}$$

Situace je načrtnuta na obrázku 1.2. Ve skutečnosti píšeme $\varphi_{k,k'}(h)$ a $\psi_{k,k'}(h)$ spíše než $\varphi(k, k')(h)$ a $\psi(k, k')(h)$ s myšlenkou, že $\varphi_{k,k'}$ a $\psi_{k,k'}$ jsou zobrazení z H do H.



Obrázek 1.2: Tento obrázek je částí Hasseova diagramu svazu L. Téměř vodorovné čáry vyznačují třídy ekvivalence θ. Prvek $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$ je nejmenší prvek třídy $k \vee k'$, který je menší než prvek (k, h). Obecně nevíme, jestli existuje nějaký prvek mezi prvky (k, h) a $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$, a to je důvod, proč ona téměř svislá čára do prvku $(k \vee k', \varphi(k, k')(h))$ nezačíná v prvku (k, h).

Dokážeme zde jisté vlastnosti zobrazení φ a ψ v uvažovaném případě, tj. v případě, že svaz H má nejmenší a největší prvky. Posléze v tvrzení 1.9 budeme uvažovat obecnější podmínky.

Lemma 1.2 *Zobrazení φ a ψ, definovaná pomocí* (1.4) *a* (1.5), *jsou korektně definována a splňují, pro všechna k, k', k'' v K a h, h' v H, následující podmínky:*

$$\varphi_{k,k} = \psi_{k,k} = \mathrm{id}_H, \tag{1.6}$$

$$\varphi_{k,k' \vee k''} = \varphi_{k \vee k', k''} \circ \varphi_{k,k'}, \tag{1.7}$$

$$\psi_{k,k' \wedge k''} = \psi_{k \wedge k', k''} \circ \psi_{k,k'}, \tag{1.8}$$

$$h \leqslant \psi_{k,k \wedge k'} \circ \varphi_{k \wedge k', k}\,(h), \tag{1.9}$$

$$h \geqslant \varphi_{k,k\vee k'} \circ \psi_{k\vee k',k}(h), \tag{1.10}$$

$$\varphi_{k,k'}(h \vee h') = \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h'), \tag{1.11}$$

$$\psi_{k,k'}(h \wedge h') = \psi_{k,k'}(h) \wedge \psi_{k,k'}(h'). \tag{1.12}$$

DŮKAZ: Dokážeme nejdříve, že je prvek $(k,h) \vee (k \vee k', 0_H)$ tvaru $(k \vee k', h'0)$, pro nějaké h' v H. Poněvadž $k \vee k'$ je větší než k v K, existuje prvek h'' v H splňující $(k \vee k', 0_H) \geqslant (k, h'')$. Každá třída kongruence tvoří podsvaz, a tak máme $(k, h'') \geqslant (k, 0_H)$, a tedy též $(k \vee k', 0_H) \geqslant (k, 0_H)$. Nyní, poněvadž (k,h) patří do stejné třídy kongruence jako $(k, 0_H)$, prvek $(k,h) \vee (k \vee k', 0_H)$ náleží do stejné třídy jako $(k \vee k', 0_H)$.

Nyní začneme dokazovat podmínky. Podmínka (1.6) plyne z definice. Všimněme si, že pokud platí (1.6), je podmínka (1.7) splněna právě tehdy, když jsou splněny následující dvě podmínky:

$$\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k\vee k'}, \tag{1.13}$$

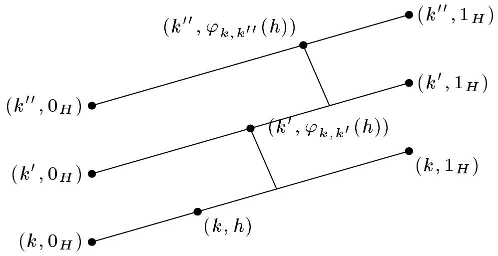
$$\varphi_{k,k''} = \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'} \qquad \text{for } k \leqslant k' \leqslant k''. \tag{1.14}$$

Implikace (1.7) $\Rightarrow$ (1.13) a (1.14) je vidět okamžitě. Následně dokážeme opačný směr: uvažujme náhodná k, k', k'' v K. Relace $k \geqslant k \vee k' \geqslant k \vee k' \vee k''$ s podmínkou (1.14) dávají $\varphi_{k,k\vee k'\vee k''} = \varphi_{k\vee k', k\vee k'\vee k''} \circ \varphi_{k,k\vee k'}$. Poté (1.7) vyplývá z (1.13).

Nyní stačí dokázat (1.13) a (1.14), abychom z toho odvodili (1.7). Podmínka (1.13) plyne z definice. Dokažme nyní (1.14) (viz obrázek 1.3). Už jsme si všimli, že pro $k \leqslant k' \leqslant k''$ v K, máme $(k, 0_H) \leqslant (k', 0_H) \leqslant (k'', 0_H)$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}(k'', \varphi_{k,k''}(h)) = (k,h) \vee (k'', 0_H) = (k,h) \vee (k', 0_H) \vee (k'', 0_H) = \\ = (k', \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k'', 0_H) = (k'', \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h)),\end{aligned}$$

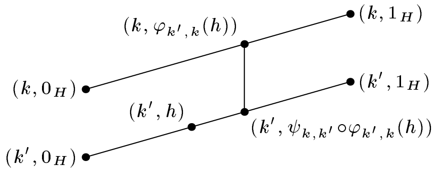
pro všechna h v H.



Obrázek 1.3: Podmínka (1.14) vyjadřuje, že se dostane stejný výsledek, když se vystoupá ze třídy k do třídy k'' přímo a když se vystoupá z k do k'' přes třídu k'.

Uvažujme (1.9) (viz obrázek 1.4). Bez újmy na obecnosti předpokládáme $k' \leqslant k$. Máme

$$
\begin{aligned}
(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)) &= (k, \varphi_{k',k}(h)) \wedge (k', 1_H) && (1.5)\\
&= ((k', h) \vee (k, 0_H)) \wedge (k', 1_H) && (1.4)\\
&\geqslant ((k', h) \wedge (k', 1_H)) \vee ((k, 0_H) \wedge (k', 1_H)) && (\text{dist.})\\
&\geqslant (k', h) \wedge (k', 1_H) = (k', h)
\end{aligned}
$$



Obrázek 1.4: Podmínka (1.9) : prvek $(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h))$ je největším prvkem třídy k', který je menší než prvek $(k, \varphi_{k',k}(h))$. Prvek (k', h) je taktéž menší než prvek $(k, \varphi_{k',k}(h))$ a tedy máme $h \leqslant \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)$.

Nakonec dokážeme (1.11):

$$
\begin{aligned}
(k \vee k', \varphi_{k,k'}(h \vee h')) &= (k, h \vee h') \vee (k \vee k', 0_H)\\
&= ((k, h) \vee (k \vee k', 0_H)) \vee ((k, h') \vee (k \vee k', 0_H))\\
&= (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h')\\
&= (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h) \vee \varphi_{k,k'}(h')).
\end{aligned}
$$

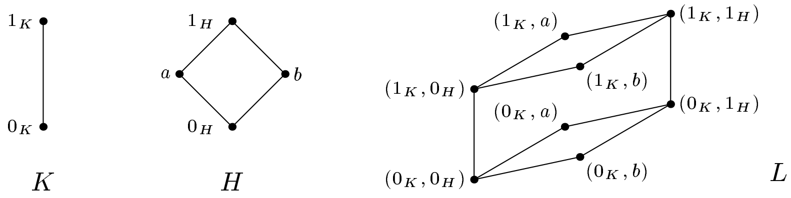
Zbytek důkazu plyne z duality operací průsek a spojení. ∎

Je vhodné dodat k důkazu, že za předpokladu (1.6), je podmínka (1.8) ekvivalentní dvojici podmínek

$$
\begin{aligned}
\psi_{k,k'} &= \psi_{k,k\wedge k'}, && (1.15)\\
\psi_{k,k''} &= \psi_{k',k''} \circ \psi_{k,k'} \qquad \text{for } k \geqslant k' \geqslant k''. && (1.16)
\end{aligned}
$$

Příklad 1.3 Podmínka (1.11) vyjadřuje, že je zobrazení φ kompatibilní se spojením. Kompatibilita s průsekem obecně neplatí: příklad vidíme na obrázku 1.5 – máme rovnost $\varphi_{0_K,1_K}(a) = \varphi_{0_K,1_K}(b) = 1_H$, ačkoliv prvek $\varphi_{0_K,1_K}(a \wedge b)$ je 0_H.

Lemma 1.2 popisuje jisté vlastnosti zobrazení φ a ψ. Tyto vlastnosti jsou postačující pro sestrojení externího semidirektního součinu.



Obrázek 1.5: Zobrazení φ není nutně kompatibilní s operací $\wedge$

Tvrzení 1.4 *Buďte K, H dva svazy a buďte $\varphi, \psi : K \times K \to H^H$ dvě zobrazení splňující podmínky* (1.6)–(1.12)*. Pak množina $K \times H$ s dvěma operacemi $\sqcup$, $\sqcap$, definovanými*

$$(k_1, h_1) \sqcup (k_2, h_2) = (k_1 \vee k_2,\ \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)), \tag{1.17}$$
$$(k_1, h_1) \sqcap (k_2, h_2) = (k_1 \wedge k_2,\ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)), \tag{1.18}$$

tvoří svaz.

Důkaz: Všimněme si prvně následujících dvou vlastností pro všechna k, k' v K a h, h' v H:

$$h \leqslant h' \Rightarrow \varphi_{k,k'}(h) \leqslant \varphi_{k,k'}(h'), \tag{1.19}$$
$$\varphi_{k,k'}(h \wedge h') \leqslant \varphi_{k,k'}(h) \wedge \varphi_{k,k'}(h'). \tag{1.20}$$

První vlastnost plyne z (1.11) a druhá z (1.19). Vidíme stejným způsobem

$$h \leqslant h' \Rightarrow \psi_{k,k'}(h) \leqslant \psi_{k,k'}(h'), \tag{1.21}$$
$$\psi_{k,k'}(h \vee h') \geqslant \psi_{k,k'}(h) \vee \psi_{k,k'}(h'). \tag{1.22}$$

Množina se dvěma operacemi je svaz, pokud tyto operace splňují zákony idempotence, symetrie, asociativity a absorpce. Idempotence operací $\sqcup$ a $\sqcap$ plyne z (1.6), symetrie plyne z definic. Nyní dokážeme asociativitu:

$$\begin{aligned}
&\big((k_1, h_1) \sqcup (k_2, h_2)\big) \sqcup (k_3, h_3) \\
&= \big(k_1 \vee k_2, \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \sqcup (k_3, h_3) && (1.17)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3}\big(\varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.17)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3} \circ \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_1 \vee k_2, k_3} \circ \varphi_{k_2,k_1}(h_2) \\
&\qquad\qquad \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.11)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2, k_1 \vee k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3, k_1 \vee k_2}(h_3)\big) && (1.7)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2 \vee k_3, k_1} \circ \varphi_{k_2,k_3}(h_2) \\
&\qquad\qquad \vee \varphi_{k_3 \vee k_2, k_1} \circ \varphi_{k_3,k_2}(h_3)\big) && (1.7)\\
&= \big(k_1 \vee k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_1, k_2 \vee k_3}(h_1) \vee \varphi_{k_2 \vee k_3, k_1}\big(\varphi_{k_2,k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3,k_2}(h_3)\big)\big) && (1.11)
\end{aligned}$$

$$= (k_1,h_1) \sqcup \big(k_2 \vee k_3,\ \varphi_{k_2,k_3}(h_2) \vee \varphi_{k_3,k_2}(h_3)\big) \qquad (1.17)$$
$$= (k_1,h_1) \sqcup \big((k_2,h_2) \sqcup (k_3,h_3)\big). \qquad (1.17)$$

Pro absorpci musíme nejdřív dokázat:

$$\varphi_{k_1\wedge k_2,k_1}(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)) \leqslant h_1. \qquad (*)$$

To dostaneme takto:

$$\begin{aligned}
&\varphi_{k_1\wedge k_2,k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big) \\
&\leqslant \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1} \circ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1} \circ \psi_{k_2,k_1}(h_2) && (1.20)\\
&\leqslant \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1} \circ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \\
&= \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1} \circ \psi_{k_1,k_1\wedge k_2}(h_1) && (1.15)\\
&\leqslant h_1. && (1.10)
\end{aligned}$$

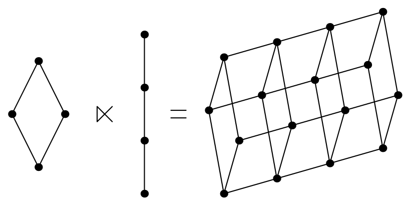
A nyní už můžeme dokázat absorpci:

$$\begin{aligned}
&(k_1,h_1) \sqcup \big((k_1,h_1) \sqcap (k_2,h_2)\big) \\
&= (k_1,h_1) \sqcup \big(k_1 \wedge k_2,\ \psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big) && (1.18)\\
&= \big(k_1,\ \varphi_{k_1,k_1\wedge k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.17)\\
&= \big(k_1,\ \varphi_{k_1,k_1}(h_1) \vee \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.13)\\
&= \big(k_1,\ h_1 \vee \varphi_{k_1\wedge k_2,k_1}\big(\psi_{k_1,k_2}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2)\big)\big) && (1.6)\\
&= (k_1,h_1) && (*)
\end{aligned}$$

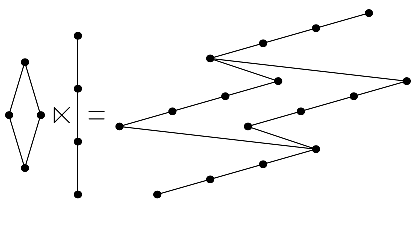
Důkazy asociativity a absorpce pro průsek jsou stejné. ∎

Definice: Svaz sestrojený v tvrzení 1.4 se nazývá *semidirektní součin* svazů K a H, a je značen $K \ltimes_\psi^\varphi H$.

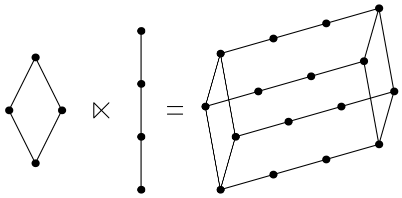
Příklad 1.5 Buďte K, H libovolné svazy a mějme $\varphi_{k,k'} = \psi_{k,k'} = \mathrm{id}_H$, pro všechna k, k' v K. Vidíme okamžitě z definic (1.17) a (1.18), že je semidirektní součin $K \ltimes_\psi^\varphi H$ roven direktnímu součinu $K \times H$.



Příklad 1.6 Buďte K, H libovolné svazy a, pro všechna $k \leqslant k'$ v K a h v H, mějme $\varphi_{k,k'}(h) = 0_H$, $\psi_{k',k}(h) = 1_H$. Pak máme $(k,h) \leqslant (k',h')$ tehdy a jen tehdy, když platí $k < k'$ v K, anebo $k = k'$ a $h \leqslant h'$ v H. A tedy semidirektní součin svazů K a H sestává z $|K|$ kopií svazu H seskupených do tvaru svazu K.



Příklad 1.7 Buďte K, H libovolné svazy a, pro všechna $k \leqslant k'$, mějme $\varphi_{k,k'}(h) = 1_H$, v případě $h > 0_H$, a $\psi_{k',k}(h) = 0_H$, v případě $h < 1_H$. Tentokrát, pokud K obsahuje alespoň 2 prvky a H alespoň 3 prvky, je svaz $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ nemodulární.



Jak můžeme očekávat, svazy K a H se dají nalézt ve svém semidirektním součinu.

Tvrzení 1.8 *Předpokládejme, že je svaz L roven $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Pak existuje kongruence θ na L níž je K faktor a jejíž třídy ekvivalence jsou izomorfní svazu H*

DŮKAZ: Buď θ ekvivalence definovaná jako $((k,h),(k',h')) \in \theta \Leftrightarrow k = k'$. Jedná se o kongruenci díky definicím (1.17) a (1.18). To, že je faktor svazu $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ přes θ izomorfní svazu K, je triviální. Existuje bijekce mezi každou z tříd kongruence θ a svazem H. Navíc, podle (1.6), jsou svazové operace na H a na každé třídě kongruence rovny. ■

Budeme nyní zkoumat semidirektní součin z interního pohledu. Už jsme něco udělali v lemmatu 1.2 za podmínky, že každá třída kongruence obsahuje nejmenší a největší prvky. I přesto, že tyto podmínky nejsou příliš omezující, můžeme je oslabit. Připomínáme, že svaz L s izoformní kongruencí θ je ztotožněn s kartézským součinem svazu $L/_\theta$ a jedné ze tříd ekvivalence.

Tvrzení 1.9 *Buď L svaz s izoformní kongruencí θ. Buď K faktor $L/_\theta$ a buď H jedna ze tříd kongruence. Předpokládejme, že jsou následující podmínky splněny:*

$$\begin{aligned}&\textit{množina } \{h' \in H;\ \exists\, k,k' \in K:\ (k,h) \leqslant (k',h')\}, \textit{ značená } E_h,\\ &\qquad\textit{je zdola omezená pro všechna } h \textit{ v } H,\end{aligned} \tag{1.23}$$

$$\begin{aligned}&\textit{množina } \{h' \in H;\ \exists\, k,k' \in K:\ (k,h) \geqslant (k',h')\}, \textit{ značená } E^h,\\ &\qquad\textit{je shora omezená pro všechna } h \textit{ v } H.\end{aligned} \tag{1.24}$$

Pak existují zobrazení φ a ψ splňující podmínky tvrzení 1.4 takové, že je svaz L izomorfní svazu $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$.

DŮKAZ: Nejdříve zvolíme, pro každé h z H, dolní mez $\underline{h}$ množiny E_h a horní mez $\overline{h}$ množiny E^h. Důkaz tvrzení je podobný tomu z lemmatu 1.2. Definujeme zobrazení φ a ψ podobným způsobem jako při definicích (1.4) a (1.5).

$$(k,h) \vee (k \vee k', \underline{h}) = (k \vee k', \varphi_{k,k'}(h)), \tag{1.25}$$

$$(k,h) \wedge (k \wedge k', \overline{h}) = (k \wedge k', \psi_{k,k'}(h)). \tag{1.26}$$

Musíme se ale ujistit, že tyto definice nezávisí na volbě mezí. Což je náš případ, neboť máme $\varphi_{k,k'}(h) = \min\{h';\ (k \vee k', h') \geqslant (k, h)\}$ a $\psi_{k,k'}(h) = \max\{h';\ (k \wedge k', h') \leqslant (k, h)\}$, pro libovolnou volbu $\underline{h}$ a $\overline{h}$.

Nyní dokážeme podmínky tvrzení 1.4, přičemž dokazujeme pouze polovinu podmínek, ostatní jsou duální. Viděli jsme, že definice (1.4) a (1.5) nezáleží na volbě mezí, a tak můžeme používat jakékoliv meze, nejen $\underline{h}$ a $\overline{h}$. Například, $\varphi_{k,k}(h) = h$ dává $\underline{h} \leqslant h$, a tedy h, $\underline{h}$, $\underline{\underline{h}}$, ... jsou vše dolní meze množiny E_h.

Podmínka (1.6) je splněna triviálně.

Všimneme si, že $\underline{h}$ a $\underline{h}'$ jsou obojí dolní meze množiny $E_{h \vee h'}$, a tedy že $\underline{h} \vee \underline{h}'$ je dolní mezí množiny $E_{h \vee h'}$. Nyní se podmínka (1.11) dokáže takto:

$$(k', \varphi_{k,k'}(h \vee h')) = (k, h \vee h) \vee (k', \underline{h} \vee \underline{h}') = \\ = (k, h) \vee (k, h') \vee (k', \underline{h}) \vee (k', \underline{h}') = (k, \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k', \varphi_{k,k'}(h')).$$

Pro důkaz podmínky (1.9), předpokládáme bez újmy na obecnosti $k \geqslant k'$. Máme

$$\begin{aligned}
&(k', \psi_{k,k'} \circ \varphi_{k',k}(h)) = (k, \varphi_{k',k}(h)) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h) && (1.26)\\
&= ((k', h) \vee (k, \underline{h})) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h) && (1.25)\\
&\geqslant ((k', h) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) \vee ((k, \underline{h}) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) && (\text{dist.})\\
&\geqslant ((k', h) \wedge (k, \overline{\varphi_{k',k}(h)} \vee h)) = (k', h)
\end{aligned}$$

V důkaze lemmatu 1.2 jsme viděli, že stačí dokázat (1.13) a (1.14) namísto podmínky (1.7). Podmínka (1.13) platí, předpokládejme tedy (1.14). Podle důkazu tvrzení 1.4, máme (1.19). Takže $\underline{h} \leqslant \varphi_{k,k'}(h)$ implikuje $\varphi_{k',k''}(h) \leqslant \varphi_{k',k''}(\varphi_{k,k'}(h))$. Máme tedy relaci $(k', \underline{h}) \leqslant (k'', \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h))$. Nerovnost $\underline{h} \leqslant \varphi_{k,k'}(h)$ dává také, že $\underline{\underline{h}}$ je dolní mezí množiny $E_{\varphi_{k,k'}(h)}$. Nyní máme

$$\begin{aligned}
(k'', \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h)) &= (k', \varphi_{k,k'}(h)) \vee (k'', \underline{\underline{h}})\\
&= (k, h) \vee (k', \underline{h}) \vee (k'', \underline{\underline{h}})\\
&= (k'', \varphi_{k,k''}(h)) \vee (k', \underline{h}) = (k'', \varphi_{k,k''}(h)).
\end{aligned}$$

Nyní víme, že zobrazení φ a ψ splňují všechny požadované podmínky. Zbývá dokázat, že svazové operace $\sqcup$, $\sqcap$ součinu jsou totožné s operacemi $\vee$, $\wedge$ svazu L. Máme

$$\begin{aligned}
(k_1, h_1) \sqcup (k_2, h_2) &= (k_1 \vee k_2, \varphi_{k_1,k_2}(h_1) \vee \varphi_{k_2,k_1}(h_2)) && (1.17)\\
&= (k_1 \vee k_2, \underline{h_1}) \vee (k_1, h_1) \vee (k_1 \vee k_2, \underline{h_2}) \vee (k_2, h_2) && (1.25)\\
&= (k_1, h_1) \vee (k_2, h_2). && (1.23)
\end{aligned}$$

Důkaz pro průsek je stejný. ∎

Jelikož jsme dokázali, že jsou operace $\sqcup$, a $\sqcap$ shodné s operacemi $\vee$, a $\wedge$, nebudeme už používat symboly $\sqcup$, $\sqcap$, nýbrž standardní symboly $\vee$ a $\wedge$.

Příklad 1.10 Podmínkám (1.23) a (1.24) se nelze vyhnout. Vezměme například $L = \{0,1\} \times \mathbb{Z}$ s lexikografickým uspořádáním. Jedná se o lineárně uspořádanou množinu, a tedy o svaz. Tento svaz má jednu evidentní izoformní kongruenci: její faktor je $\{0,1\}$ a obě třídy kongruence jsou izomorfní svazu $\mathbb{Z}$. Přesto nelze nalézt zobrazení φ a ψ splňující podmínky tvrzení 1.4, protože prvek $(1,a)$ je ostře větší než $(0,b)$ v L, pro všechna a, b v $\mathbb{Z}$.

1.2 Zobrazení φ a ψ

Konstrukce semidirektního součinu využívá dvou zobrazení, φ a ψ, aby definovala strukturu svazu na množině $K \times H$. Nicméně, jelikož jsou svazové operace odvozeny z uspořádání svazu a toto uspořádání je, dle podmínky (1.17), definováno přes

$$(k,h) \leqslant (k',h') \iff (k \leqslant k') \text{ a } (\varphi_{k,k'}(h) \leqslant h'), \tag{1.27}$$

pouze jedno ze zobrazení musí stačit, abychom mohli popsat strukturu svazu. V této sekci zkoumáme vztah zobrazení φ a ψ, speciálně proto, abychom mohli definovat semidirektní součin pouze s jedním z těchto zobrazení.

Definice: Buď L svaz. Podmnožina I svazu L se nazývá *ideál,* jestliže splňuje následující podmínky:

$$\text{z } a, b \in I \text{ vyplývá } a \vee b \in I, \tag{1.28}$$

$$\text{z } a \in L \text{ a } b \in I \text{ vyplývá } a \wedge b \in I. \tag{1.29}$$

Pro každé b v L, je množina $\{a \in L;\ a \leqslant b\}$ ideál, který se nazývá *hlavní ideál* a je značen $(b]$. Definujeme duálně *filtr* a *hlavní filtr*, značený $[b)$.

Následující technické lemma popisuje vztah mezi $\varphi_{k,k'}$ a $\psi_{k',k}$ v nejdůležitějším případě – když k je menší než k'. Ostatní případy už plynou z tohoto.

Lemma 1.11 *Nechť je svaz L semidirektním součinem $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Mějme nějaké prvky k a k' svazu K, splňující $k \leqslant k'$.*
(i) Definujme zobrazení $\xi = \psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'}$ a $\omega = \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k}$. Pak máme:

$$\xi(h) = \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k,k'}(j) = \varphi_{k,k'}(h)\,\},$$
$$\omega(h) = \min\{\, j \in H;\ \psi_{k',k}(j) = \psi_{k',k}(h)\,\}.$$

(ii) Platí $\varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k'}$ a $\psi_{k',k} \circ \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k} = \psi_{k',k}$.
(iii) Zobrazení $\varphi_{k,k'}|_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}}$ je izomorfismus mezi svazy $\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}$ a $\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}$. Zobrazení $\psi_{k',k}|_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}}$ je inverzní izomorfismus.
(iv) Zobrazení $\psi_{k',k}$ splňuje $\psi_{k',k}(h) = \max(\varphi_{k,k'}^{-1}((h]))$.

DŮKAZ: (i) Z nerovnosti (1.9), dostáváme $h \leqslant \xi(h)$. Následně použijeme (1.19), a dostaneme $\varphi_{k,k'}(h) \leqslant \varphi_{k,k'}(\xi(h))$. Z (1.10) plyne $\varphi_{k,k'}(h) \geqslant \varphi_{k,k'} \circ \psi_{k',k}(\varphi_{k,k'}(h)) = \varphi_{k,k'}(\xi(h))$. A tak, pro každé h z H, máme $\varphi_{k,k'}(\xi(h)) = \varphi_{k,k'}(h)$ a $h \leqslant \xi(h)$. Vlastnosti zobrazení ω se dokáží stejně. Bod (ii) je teď okamžitým důsledkem.

(iii) Mějme h v Im $\psi_{k',k}$. Existuje h' v H splňující $\psi_{k',k}(h') = h$. Ale platí $\xi(h) = \xi\psi_{k',k}(h') = \psi_{k',k}(h') = h$ a to dává $\xi|_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}}$. Stejně tak platí $\omega|_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}}$, a tak jsou zobrazení $\varphi_{k,k'}|_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}}$ a $\psi_{k',k}|_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}}$ navzájem inverzními bijekcemi. Vlastnost (1.19) dává, že $\varphi_{k,k'}(H)$ je průsekový polosvaz, a tak, podle (1.21), je množina $\xi(H)$, která je rovna $\mathrm{Im}_{\psi_{k',k}}$, svazem a zobrazení $\varphi_{k,k'}|_{\mathrm{Im}\ \psi_{k',k}}$ a $\psi_{k',k}|_{\mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'}}$ jsou izomorfismy.

(iv) Uvažujme prvek h v H a označme M_h množinu $\{\, j \in \mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'};\ j \leqslant h \,\}$. Tato množina je neprázdná, protože je dle (1.9) prvek $\omega(h)$ v M_h. Chceme dokázat, že je $\omega(h)$ největším prvkem M_h.

Dokážeme nejdřív, že je $\omega(h)$ maximálním prvkem M_h. Pokud máme prvek j v M_n, splňující $\omega(h) < j \leqslant h$, pak existuje prvek j' v H, který splňuje $\varphi_{k,k'}(j') = j$. Podle (1.21) platí $\psi_{k',k}\omega(h) = \psi_{k',k}(h) \leqslant \psi_{k',k}(j) \leqslant \psi_{k',k}(h)$, a tak máme $\psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(j)$. Aplikujeme zobrazení $\varphi_{k,k'}$ a dostaneme $\omega(h) = \omega(j) = \omega\varphi_{k,k'}(j') = \varphi_{k,k'}(j') = j$, což je spor.

Předpokládejme, že má množina M_h dva maximální prvky, řekněme j_1, j_2. Pak existují prvky h_1, h_2 v H, které splňují $\varphi_{k,k'}(h_i) = j_i$, pro $i = 1, 2$. Ale platí $j_1 \vee j_2 = \varphi_{k,k'}(h_1) \vee \varphi_{k,k'}(h_2) = \varphi_{k,k'}(h_1 \vee h_2)$ a také $j_1 \vee j_2 \leqslant h$, a tak $j_1 \vee j_2$ náleží do M_h a prvek j_1 je roven j_2.

V tomto okamžiku máme $\omega(h) = \max(M_h)$. Na tuto rovnost aplikujeme zobrazení $\psi_{k',k}$ a dostaneme $\psi_{k',k}\omega(h) = \psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(\max(M_h))$. Následně nalezneme

$$\begin{aligned}
\psi_{k',k}(h) = \psi_{k',k}(\max(M_h)) &= \psi_{k',k}(\max\{\, j \in \mathrm{Im}\ \varphi_{k,k'};\ j \leqslant h \,\}) \\
&= \max\{\, j \in \mathrm{Im}\ \xi;\ j \leqslant \psi_{k',k}(h) \,\} && (iii) \\
&= \max\{\, j \in \mathrm{Im}\ \xi;\ \varphi_{k,k'}(j) \leqslant h \,\} && (iii) \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k,k'}(j) \leqslant h \,\}. && (i) \\
&= \max(\varphi_{k,k'}^{-1}((h])).
\end{aligned}$$

Což ukončuje důkaz (iv). ∎

Teď už můžeme definovat semidirektní součin svazů pomocí jediného zobrazení.

Tvrzení 1.12 *Nechť jsou K, H svazy a nechť je φ zobrazení z $K \times K$ do H^H, které splňuje $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pro všechna k v K, a podmínky (1.7) a (1.11), a také, pro všechna k_1, k_2 v K, podmínku*

$$\text{množina } \varphi_{k_1,k_2}^{-1}\Big((h]\Big) \text{ vlastní nejmenší prvek.} \tag{1.30}$$

Pak tvoří množina $K \times H$ s uspořádáním $\leqslant$ definovaným v (1.27) svaz.

DŮKAZ: Rekonstruujeme zobrazení ψ, pomocí zobrazení φ a ukážeme, že tato zobrazení splňují podmínky semidirektního součinu. Zobrazení $\psi : K \times K \to H^H$ je definováno následovně:

$$\psi_{k_1,k_2}(h) = \max(\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_1}((h])). \tag{1.31}$$

Za prvé, rovnost $\psi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pro každé k v K, je evidentní, stejně jako podmínka (1.15). Takže abychom dokázali (1.8), stačí dokázat (1.16). Máme

$$\begin{aligned}
&\psi_{k',k''} \circ \psi_{k,k'}(h) = \\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant \max\{\, g \in H;\ \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\}\} && (1.31)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \exists g \in H:\ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant g \text{ a } \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\}\\
&= \max\{\, j \in H;\ \exists g \in H:\ \varphi_{k',k} \circ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant \varphi_{k',k}(g) \leqslant h \,\} && (1.19)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k',k} \circ \varphi_{k'',k'}(j) \leqslant h \,\}\\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k'',k}(j) \leqslant h \,\} && (1.7)\\
&= \psi_{k,k''}(h). && (1.31)
\end{aligned}$$

Pro (1.10), podle definice $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((h\,])$, máme $\varphi_{k_1,k_2}(g) \leqslant h$, pro všechna g v $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((h\,])$. To samé platí pro maximum, což dává nerovnost $\varphi_{k_1,k_2}(\psi_{k_2,k_1}(h)) \leqslant h$.

Podmínka (1.9) je podobná: každé h z H náleží do $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((\varphi_{k_1,k_2}(h)\,])$. Takže prvek $\psi_{k_2,k_1}(\varphi_{k_1,k_2}(h))$, který je roven $\max(\varphi^{-1}_{k_1,k_2}((\varphi_{k_1,k_2}(h)\,]))$, je menší než h.

Dokažme nyní (1.12). Všimněme si, že množina $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ je hlavní ideál: pokud dva prvky j_1, j_2 jsou v $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$, máme nerovnost $\varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_i) \leqslant h$ pro $i = 1,2$ a tedy také $\varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_1 \vee j_2) = \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_1) \vee \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j_2) \leqslant h$. Podmínka (1.19) zajišťuje, že pro všechna j v libovolném $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ všechny prvky menší než j náleží rovněž do množiny $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$. Tyto dvě vlastnosti samy dávají, že $\varphi^{-1}_{k_1\wedge k_2,k_2}((h\,])$ je ideál svazu H. A podmínka (1.30) říká, že tento ideál je hlavní. Takže máme

$$\begin{aligned}
&\psi_{k_2,k_1}(h_1 \wedge h_2)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \wedge h_2 \,\} && (1.31)\\
&= \max\big(\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \,\} \cap \{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_2 \,\}\big)\\
&= \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_1 \,\} \wedge \max\{\, j \in H;\ \varphi_{k_1\wedge k_2,k_2}(j) \leqslant h_2 \,\}\\
&= \psi_{k_2,k_1}(h_1) \wedge \psi_{k_2,k_1}(h_2), && (1.31)
\end{aligned}$$

což dává (1.12).

Podmínky (1.7) a (1.11) jsou splněny dle předpokladu tvrzení, a tedy svazy K a H se zobrazeními φ a ψ jsou vhodné pro sestrojení semidirektního součinu, dle tvrzení 1.4. Poněvadž definice (1.27) vyhovuje definici (1.17), důkaz je hotov. ∎

Svaz sestrojený v tvrzení 1.12 je semidirektní součin, a je značen $K \ltimes^{\varphi} H$. Stejným způsobem, pokud uvažujeme zobrazení ψ, tj. to, které popisuje operaci průseku, značíme semidirektní součin $K \ltimes_{\psi} H$.

1.3 Semidirektní součin polosvazů

Definovali jsme semidirektní součin svazů pomocí jediného zobrazení. Stejná myšlenka lze použít pro definování semidirektního součinu polosvazů; zkoumáme v této sekci semidirektní součin polosvazů a některé jeho vlastnosti.

Definice: Řekneme, že spojový polosvaz L je *úplný,* jestliže má nejmenší prvek a každá podmnožina L má supremum. Řekneme, že svaz L je *úplný* jestliže má nejmenší a největší prvky a jestliže každá podmnožina svazu L má supremum a infimum.

Je známo [1], že tyto dvě definice jsou ekvivalentní, tj. že úplný polosvaz je úplný svaz. Definujeme nyní semidirektní součin dvou polosvazů a dokážeme, že semidirektní součin úplných svazů je úplný.

Tvrzení 1.13 (i) *Buďte K, H dva spojové polosvazy a buď φ zobrazení z $K \times K$ do množiny* $\mathrm{End}(H)$, *které splňuje $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$, pro všechna k v K, a podmínku* (1.11). *Pak je množina $K \times H$ s uspořádáním $\leqslant$ definovaným přes* (1.27) *spojový polosvaz.*
(ii) *Pokud jsou navíc K, H úplné a pokud zobrazení φ splňuje podmínku* (1.30), *pak je $(K \times H, \leqslant)$ úplný svaz.*

DŮKAZ: Důkaz bodu (i) je podobný tomu od tvrzení 1.4. Jediná věc, kterou je třeba upřesnit, je že podmínka (1.7) je splněna, protože každé zobrazení $\varphi_{k,k'}$ je endomorfismus polosvazu H.

(ii) Mějme dva úplné spojové polosvazy K a H. Označme 0_K a 0_H nejmenší prvky těchto svazů a 1_K a 1_H jejich největší prvky. Dokážeme nejdřív, že semidirektní součin $(K \times H, \leqslant)$ vlastní nejmenší prvek. Pro každé k_1, k_2 v K máme $\varphi_{k_1,k_2}(0_H) \leqslant 0_H$, jelikož $\varphi^{-1}_{k_1,k_2}(0_H)$ je neprázdná. A tak platí $\varphi_{k_1,k_2}(0_H) = 0_H$. Z toho vyplývá, že pro libovolné $k_1 \leqslant k_2$ v K a h v H platí $(k_1, 0_H) \leqslant (k_2, h)$. Takže $(0_K, 0_H)$ je nejmenším prvkem svazu $(K \times H, \leqslant)$.

Mějme nyní M, neprázdnou podmnožinu $K \times H$. Chceme dokázat, že M má supremum. Označme A množinu $\{\, k \in K;\, \exists h \in H :\ (k,h) \in M \,\}$ a a supremum množiny A. Označme také B množinu $\{\, j \in H;\ \forall (k,h) \in M :\ (a,j) \geqslant (k,h) \,\}$. Tato množina je neprázdná, poněvadž prvek $(a, 1_H)$ je větší než nebo stejný jako všechny prvky z M. Označíme b infimum množiny B. Ukážeme nejdřív, že b patří do množiny B. Kdyby tomu tak nebylo, pak by existoval prvek (k,h) v M splňující $(k,h) \nleqslant (a,b)$. Buď c prvek $\varphi_{k,a}(h)$ z H. Prvek c je dolní mezí B, protože každé (a,j), pro j v B, je větší než prvek (k,h). Ale b je největší dolní mez množiny B, a tak máme $c \leqslant b$, což dává $(k,h) \leqslant (a,b)$ a dostáváme spor.

Víme teď, že je prvek (a,b) horní mezí množiny M. Chceme dokázat, že je supremem, což značí, že každá jiná horní mez (k,h) množiny M splňuje $(a,b) \leqslant (k,h)$. Jelikož je (k,h) horní mezí množiny M, prvek k musí být horní mezí množiny A. Ale a je supremum A, a tak máme $k \geqslant a$. Pokud jsou k a a rovna, máme $h \in B$ a $b \leqslant h$. Předpokládejme tedy $k > a$. Podle podmínky (1.30), víme, že množina $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$ má největší prvek, řekněme m. Poněvadž prvek b nenáleží do $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$, platí $m \ngeqslant b$. Ale prvek (a,m) je horní mezí množiny M: mějme libovolný prvek (l,j) v M. Pak je prvek (k,h) horní mezí množiny M a platí $\varphi_{l,k}(j) \leqslant h$. Dle podmínky (1.7) máme $\varphi_{l,k}(j) = \varphi_{a,k} \circ \varphi_{l,a}(j)$, a tedy $\varphi_{l,a}(j)$ náleží do $\varphi_{a,k}^{-1}((h])$, což dává $(a,m) \geqslant (l,j)$. Tedy (a,m) je horní mezí množiny M a dostáváme $m \in B$, což je spor s předpokladem $m \ngeqslant b$. A tak je prvek (a,b) supremem množiny M a polosvaz $(K \times H, \leqslant)$ je úplný.

■

Semidirektní součin polosvazů je značen stejně jako semidirektní součin svazů, tj. $K \times^{\varphi} H$ pro spojový polosvaz a $K \times_{\psi} H$ pro průsekový polosvaz. Semidirektní součin polosvazů může být také charakterizován interně:

Tvrzení 1.14 *Buď L spojový polosvaz a buď θ izoformní kongruence na L. Označme K polosvaz $L/_{\theta}$, a H jednu ze tříd kongruence. Jestliže L splňuje podmínku (1.23), pak existuje zobrazení φ z $K \times K$ do $\mathrm{End}(H)$ takové, že L je izomorfní polosvazu $K \ltimes^{\varphi} H$.*

DŮKAZ: Stačí dokázat podmínky tvrzení 1.13. Důkaz je podobný tomu od tvrzení 1.9. ■

Definice: Buď $(A, \leqslant)$ uspořádaná množina. Buďte a, b dva prvky množiny A. Řekneme, že b je *bezprostřední následník* prvku a, jestliže je b větší než a a jestliže neexistuje prvek c, odlišný od a a b, který je mezí a a b. Říkáme současně, že prvek a je *bezprostřední předchůdce* prvku b.

Chtěli bychom nyní popsat zobrazení φ. Můžeme je popsat úplně, tzn. definovat $\varphi_{k,k'}$ pro každou dvojici k, k' v K. Ale to není nutné. Všimněme si, že máme $\varphi_{k,k'} = \mathrm{id}_H$, pro $k \geqslant k'$. Jsou-li k a k' neporovnatelné, pomocí podmínky (1.13) dostaneme $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k \vee k'}$. V důsledku stačí popsat zobrazení $\varphi_{k,k'}$ pouze pro $k < k'$. S jednou dodatečnou podmínkou můžeme ještě zmenšit počet případů a uvažovat pouze, že prvek k' je bezprostřední následník prvku k.

Tvrzení 1.15 *Nechť jsou K, H dva spojové podsvazy nechť je φ zobrazení z $K \times K$ do $\mathrm{End}(H)$ takové, že $K \ltimes^{\varphi} H$ existuje.*
(i) Jestliže je každý interval svazu K konečné délky, pak je zobrazení φ jednoznačně určeno zobrazeními $\varphi_{k,k'}$, kde k' je bezprostřední následník prvku k v K.
(ii) Jestliže je každý interval svazu H konečné délky, pak platí, pro každé k', bezprostředního následníka prvku k v K,

$$\varphi_{k,k'}(h) = \varphi_{k,k'}\big(\min\{h' \in H : \ (h' \geqslant h) \text{ a } ((k', \varphi_{k,k'}(h')) \text{ bezpr. následuje } (k,h'))\}\big).$$

Důkaz: (i) Řekli jsme si před chvílí, že stačí popsat zobrazení $\varphi_{k,k'}$ pouze pro $k < k'$, ty ostatní jsou už jimi jednoznačně určeny. Mějme pár k, k' splňující $k < k'$ v K, kde k' není bezprostřední následník prvku k. Každý interval v K je konečný, a tak existuje posloupnost $k = k_0, k_1, ..., k_m = k'$ taková, že k_i je bezprostřední následník prvku k_{i-1}, pro všechna i mezi 1 a m. Podle (1.14) platí $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k_{m-1},k_m} \circ \cdots \circ \varphi_{k_1,k_2} \circ \varphi_{k_0,k_1}$.

(ii) Jestliže je prvek $(k', \varphi_{k,k'}(h))$ bezprostřední následník prvku (k, h), tvrzení platí. Pokud tomu tak není, pak existuje prvek (k'', h'') mezi (k, h) a $(k', \varphi(k, k')(h))$. Poněvadž k' je bezprostřední následník prvku k, nutně platí $k'' = k$ a můžeme pokračovat indukcí. ∎

Tvrzení 1.15 vyjadřuje, že v případě svazu L, jehož všechny intervaly jsou konečné (například, je-li L konečný svaz), je zobrazení φ jednoznačně určeno dvojicemi prvků $((k, h), (k', \varphi_{k,k'}(h)))$, kde prvek $(k', \varphi_{k,k'}(h))$ je bezprostřední následník prvku (k, h). Tuto myšlenku použijeme v kapitole 2.

Zabývali jsme se v celé sekci spojovými polosvazy. Ale evidentně existují duální výsledky pro průsekové polosvazy, jejichž důkazy jsou duální.

1.4 Libovolná kongruence

V této sekci dokážeme, že pokud svaz L vlastní libovolnou kongruenci θ, pak se L vnoří do semidirektního součinu $L/_\theta$ a jedné ze tříd ekvivalence θ.

Definice: Ať jsou $L_1, L_2, \ldots, L_\kappa$ svazy a κ ordinál. Značíme $\sum_{i<\kappa} L_i$ *ordinální součet* svazů, definovaný jako disjunktní sjednocení množin L_i s uspořádáním $\leqslant$:

$$a \leqslant b \text{ v } L \iff ((a, b \in L_i) \text{ a } (a \leqslant_{L_i} b)) \text{ nebo } ((a \in L_i, b \in L_j) \text{ a } (i < j)).$$

Je evidentní, že je ordinální součet svazů také svaz.

Tvrzení 1.16 *Buď L svaz a buď θ netriviální kongruence na L. Pak se L vnořuje do semidirektního součinu svazu $L/_\theta$ a ordinálního součtu tříd kongruence a jednoprvkových svazů. Toto vnoření rozšiřuje kongruenci θ na kanonickou kongruenci semidirektního součinu.*

Důkaz: Označme $K = L/_\theta$, a nechť je $[a]_\theta$ třída prvku a vzhledem k θ. Vnoříme svaz L nejdříve do svazu L', ve kterém třídy kongruence mají krajní prvky. Položíme $L' = L \cup \{0_k, 1_k;\ k \in K\}$. Uspořádání na L' je definováno pomocí:

$$\begin{array}{ll} a \leqslant_{L'} b \Leftrightarrow a \leqslant_L b & \text{pro } a, b \in L \\ 0_k \leqslant_{L'} a \Leftrightarrow k \leqslant_K [a]_\theta & \text{pro } a \in L, k \in K \\ a \leqslant_{L'} 1_k \Leftrightarrow [a]_\theta \leqslant_K k & \text{pro } a \in L, k \in K \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
0_k \leqslant_{L'} 0_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' &\quad& \text{pro } k, k' \in K\\
1_k \leqslant_{L'} 1_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' && \text{pro } k, k' \in K\\
0_k \leqslant_{L'} 1_{k'} &\Leftrightarrow k \leqslant_K k' && \text{pro } k, k' \in K\\
1_k <_{L'} 0_{k'} &\Leftrightarrow k <_K k' && \text{pro } k, k' \in K
\end{aligned}
$$

Snadno nahlédnout, že $(L', \leqslant_{L'})$ tvoří svaz. Definujeme ekvivalenci θ' na svazu L', tak aby třídy ekvivalence byly, pro každé k v K, množiny $\{a \in L;\ [a]_\theta = k\} \cup \{0_k, 1_k\}$. Tato ekvivalence je kongruencí a její faktor je svaz K. Vnoříme svaz L do L' zobrazením $a \mapsto a$. Toto vnoření rozšiřuje kongruenci θ na kongruenci θ'.

Označíme α kanonický homomorfismus z L' na K, Zvolme nyní uspořádání $\trianglelefteq$, které je lineárním rozšířením uspořádání $\leqslant_K$. Označme $\triangleleft$ ostrou formu uspořádání $\trianglelefteq$. Sestrojíme svaz H pomocí tohoto uspořádání jako ordinální součet tříd kongruence θ':

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in K,\ \text{uspořádané } \trianglelefteq} \alpha^{-1}(k).$$

Označme γ zobrazení z H do K, které posílá každý sčítanec ordinálního součtu na příslušný prvek svazu K.

Každý sčítanec svazu H je kopií podsvazu $\alpha^{-1}(k)$ pro nějaké k z K. A tak existuje přirozená bijekce β_k mezi množinami $\alpha^{-1}(k)$ a $\gamma^{-1}(k)$. Toto zobrazení je homomorfismus. Pokud sjednotíme všechny β_k, dostaneme β, bijekci z množiny L' na množinu H: definujeme $\beta(a) = \beta_{\alpha(a)}(a)$.

Definujme teď zobrazení φ z $K \times K$ do H^H, které umožní sestrojit semidirektní součet. K tomu definujeme $\varphi_{k,k'}$, pro všechna $k <_K k'$ v K následovně (viz příklad 1.17):

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}(h) &= \beta(0_{\gamma(h)}) &\quad& \text{pro } h \leqslant_H \beta(0_k) \text{ nebo } \beta(1_{k'}) <_H h\\
\varphi_{k,k}(h) &= \beta(1_{k'}) && \text{pro } \beta(1_k) \leqslant_H h \leqslant_H \beta(1_{k'})\\
\varphi_{k,k'}(h) &= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) && \text{pro } \beta(0_k) <_H h <_H \beta(1_k)
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

Musíme nejdřív dokázat, že toto zobrazení umožňuje sestrojit semidirektní součin. Začneme důkazem, že pro všechna $k <_K k'$ v K, je zobrazení $\varphi_{k,k'}$ slučitelné se spojením. K tomuto dokážeme, že prvek $\varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k,k'}(h')$ je roven prvku $\varphi_{k,k'}(h \vee_H h')$, pro všechna h, h' v H. Uvažujme $\gamma(h) \trianglelefteq \gamma(h')$, bez újmy na obecnosti. Poněvadž platí $\gamma(\varphi_{k,k'}(h)) \trianglelefteq \gamma(\varphi_{k,k'}(h'))$, rovnost platí pro $\gamma(h) \triangleleft \gamma(h')$. Předpokládejme následně $\gamma(h) = \gamma(h')$. Případ $\gamma(h) \neq k$ je zřejmý, takže uvažujme $\gamma(h) = \gamma(h') = k$. Je-li jeden z prvků h, h' roven prvku 0_k nebo prvku 1_k, pak je rovnost zřejmá. Předpokládejme tedy, že tomu tak není. Platí

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k,k'}(h') &= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_{k'})\\
&= \beta_{k \vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta_{k \vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h')}(h') \vee_{L'} 0_{k'})\\
&= \beta_{\gamma(h) \vee_K 0_{k'}}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}_{\gamma(h')}(h') \vee_{L'} 0_{k'})
\end{aligned}
\tag{1.32}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \beta_{k\vee_K k'}(\beta^{-1}_{\gamma(h)}(h \vee_H h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \beta(\beta^{-1}(h \vee_H h') \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&= \varphi_{k,k'}(h \vee_H h'). && (1.32)
\end{aligned}
$$

Použili jsme, že zobrazení β je izomorfismus, pokud zúženo na jednu třídu kongruence, a že platí rovnosti $\gamma(h) = \gamma(h')$ a $\alpha(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) = k \vee_K k' = \alpha(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_{k'})$.

Nyní dokážeme $\varphi_{k,k''} = \varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}$ pro všechna $k <_K k' <_K k''$ v K. Platí

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k',k''} \circ \varphi_{k,k'}(h) &= \beta(\beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'})) \vee_{L'} 0_{k''}) && (1.32)\\
&= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'} \vee_{L'} 0_{k''}) \\
&= \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k''}) \\
&= \varphi_{k,k''}(h), && (1.32)
\end{aligned}
$$

pro h v H splňující $\beta(0_k) <_H h <_H \beta(1_k)$. A ostatní případy jsou snadné.

Zbývá podmínka (1.30). Ve většině případů je jednoduchá, konkrétně
- pro $h <_H \beta(0_k)$, je maximum $\beta(1_{\gamma(h)})$,
- pro $\beta(0_k) \leqslant_H h \leqslant_H \beta(0_{k'})$, je maximum $\beta(0_k)$,
- pro $\beta(1_{k'}) \leqslant_H h$ je maximum $\beta(1_{\gamma(h)})$.

Mějme teď $\beta(0_{k'}) <_H h <_H \beta(1_{k'})$. Chceme dokázat, že pro každé k, k' v K, je maximum $\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. Dokážeme nejdřív, že tento prvek patří do$\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$.

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k,k'}((\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)) &= \beta(\beta^{-1}(\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)) \vee_{L'} 0_{k'}) && (1.32)\\
&= \beta((\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k) \vee_{L'} 0_{k'}) \\
&\leqslant_H \beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} (1_k \vee_{L'} 0_{k'})) && \text{(distr.)}\\
&\leqslant_H h.
\end{aligned}
$$

Teď dokážeme, že tento prvek je největší z množiny $\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$. Předpokládejme sporem, že existuje prvek h' v H, splňující $\gamma(h') = k$, takový, že platí $\varphi_{k,k'}(h') \leqslant_H h$ a $\beta^{-1}(h') >_L (\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. Poněvadž platí $\gamma(h') = k$, vyvodíme $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} 1_k$ a nerovnost $\varphi_{k,k'}(h') \leqslant_H h$ dává $\beta^{-1}(h') \vee 0_k \leqslant_{L'} h$. Odvodíme tak $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} \beta^{-1}(h)$. Takže máme $\beta^{-1}(h') \leqslant_{L'} (\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$, což je spor. A tak je prvek $\beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$ největším prvkem množiny $\varphi^{-1}_{k,k'}((h])$.

Ověřili jsme všechny podmínky vyžadované po zobrazení $\varphi_{k,k'}$, pro $k < k'$ v K a nyní stačí položit $\varphi_{k,k} = \mathrm{id}_H$ a $\varphi_{k,k'} = \varphi_{k,k\vee k'}$, pro všechna k, k' v K. Z tvrzení 1.9 odvodíme existenci svazu $K \ltimes^{\varphi} H$.

Uvažujme nyní množinu

$$\tilde{L} = \{(k,h);\ k \in K,\ h \in H,\ \gamma(h) = k,\ 0_k \neq \beta^{-1}(h) \neq 1_k\}.$$

Dokážeme, že $\tilde{L}$ je podsvaz svazu $K \ltimes^{\varphi} H$ a že je izomorfní svazu L. Buďte $(k,h), (k',h')$

libovolné prvky množiny $\tilde{L}$. Pak, pro každý prvek $(k,h) \vee_{K \ltimes^\varphi H} (k',h')$ platí podle definice

$$\begin{aligned}
&(k \vee_K k', \varphi_{k,k'}(h) \vee_H \varphi_{k',k}(h')) \\
&= (k \vee_K k', \beta_{k \vee k'}(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} 0_{k'}) \vee_H \beta_{k \vee k'}(\beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_k)) \\
&= (k \vee_K k', \beta_{k \vee k'}(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h') \vee_{L'} 0_k \vee_{L'} 0_{k'})) \\
&= (k \vee_K k', \beta(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h'))).
\end{aligned}$$

Vidíme, že $\alpha(\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h'))$ je $k \vee_K k'$. Navíc, vztahy $\beta^{-1}(h) \in L$ a $\beta^{-1}(h') \in L$ dávají $\beta^{-1}(h) \vee_{L'} \beta^{-1}(h') \notin \{0_{k \vee k'}, 1_{k \vee k'}\}$. A tedy prvek $(k,h) \vee_{K \ltimes^\varphi H} (k',h')$ náleží množině $\tilde{L}$.

Abychom dokázali stejný výsledek pro operaci průseku, museli bychom mít definici zobrazení ψ, podobnou té pro zobrazení φ. Už jsme ale dokázali, že podle (1.31), pro všechna k,k' v K splňující $0_k \neq \beta^{-1}(h) \neq 1_k$ a $\gamma(h) = k$, máme $\psi_{k',k}(h) = \beta(\beta^{-1}(h) \wedge_{L'} 1_k)$. Takže důkaz toho, že prvek $(k,h) \wedge_{K \ltimes^\varphi H} (k',h')$ zůstává v $\tilde{L}$ je podobný tomu pro operaci spojení.

Zbývá nám dokázat poslední věc, a to, že svaz L je izomorfní svazu $\tilde{L}$. Definujeme zobrazení $f : L \to \tilde{L}$, které posílá a na $(\alpha(a), \beta(a))$. Toto zobrazení je bijekce. Musíme se pouze ujistit, že se jedná o homomorfismus. Mějme a,b v L. Pak platí

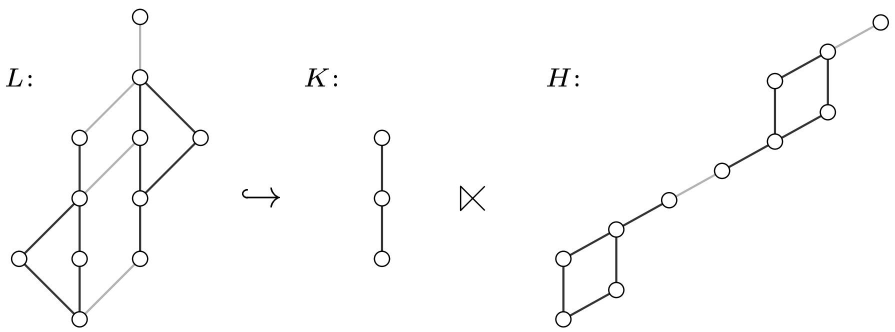
$$\begin{aligned}
f(a) \vee_{K \ltimes^\varphi H} f(b) &= (\alpha(a), \beta(a)) \vee_{K \ltimes^\varphi H} (\alpha(b), \beta(b)) \\
&= (\alpha(a) \vee_K \alpha(b), \varphi_{\alpha(a),\alpha(b)}(\beta(a)) \vee_H \varphi_{\alpha(b),\alpha(a)}(\beta(b)) && (1.18) \\
&= (\alpha(a \vee_{L'} b), \beta(a \vee_{L'} 0_{\alpha(b)}) \vee_H \beta(b \vee_{L'} 0_{\alpha(a)})) && (1.32) \\
&= (\alpha(a \vee_L b), \beta(a \vee_{L'} b \vee_{L'} 0_{\alpha(a \vee_L b)}) \\
&= (\alpha(a \vee_L b), \beta(a \vee_L b)).
\end{aligned}$$

Výsledek pro operaci průseku je podobný. Zobrazení f je tedy izomorfismus a svaz L se vnořuje do $K \ltimes^\varphi H$. ∎

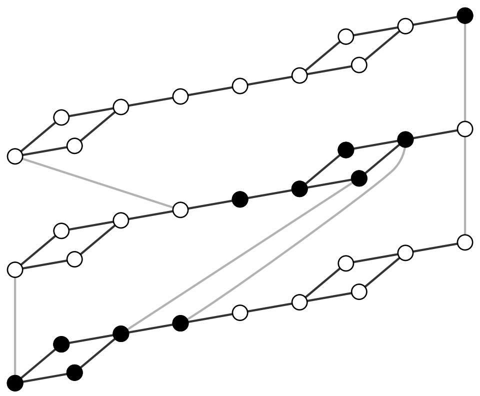
Příklad 1.17 Předvedeme zde příklad ukazující jak konstrukce funguje na konkrétním příkladě. Buď L svaz z obrázku 1.6. Zvolíme netriviální kongruenci označenou černými hranami. Když sestrojíme konstrukci popsanou v důkaze tvrzení 1.16, dostaneme svaz z obrázku 1.7. Svaz L je konečný, a tak není nutné jej nejdřív vnořovat do svazu L'. Vidíme, že se L vnořuje přímo do semidirektního součinu $K \ltimes^\varphi H$ (černé vrcholy).

1.5 Třída uzavřená na semidirektní součiny

Následující otázka vyvstává: „Které svazy se dostanou jako semidirektní součiny?“ Zkusíme odpovědět na tuto otázku studiem třídy svazů uzavřené na semidirektní součiny. Ukážeme, že pro konečné svazy je jednoduchost jedinou překážkou. Připomínáme, že konečné řetězce se značí $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots, \mathbf{n}, \ldots$



Obrázek 1.6: Svazy L, K a H



Obrázek 1.7: Svaz L se vnořuje do $K \ltimes^{\varphi} H$

Definice: Jako $\mathcal{SD}$ označíme nejmenší třídu svazů, která obsahuje svaz $\mathbf{2}$ a která je uzavřená na podsvazy, na semidirektní součiny a na izomorfní obrazy. Pro každý svaz L v $\mathcal{SD}$, definujeme induktivně číslo $\tau(L)$:

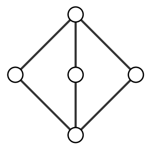
$$\tau(L) = \begin{cases} 0 & \text{pro } L \cong \mathbf{2}, \\ \min\{\, p;\ \text{existují } K, H \text{ v } \mathcal{SD} \text{ splňující } \tau(K) < p, & \\ \qquad \tau(H) < p \text{ a } L \hookrightarrow K \ltimes^{\varphi}_{\psi} H \text{ pro nějaké } \varphi, \psi \,\} & \text{pokud ne.} \end{cases} \tag{1.33}$$

Číslo $\tau(L)$ říká, kolik semidirektních součinů je potřeba, abychom dostali svaz L ze svazu $\mathbf{2}$.

Příklad 1.18 Pokud provedeme semidirektní součin svazu $\mathbf{k}$ a svazu $\mathbf{n}$ pomocí semidirektního součinu z příkladu 1.6, dostaneme svaz $\mathbf{kn}$. Vidíme tedy indukcí, že se svaz $\mathbf{2^{2^k}}$ dostane v k krocích ze svazu $\mathbf{2}$. Vidíme snadno, že libovolný semidirektní součin svazu o k prvcích a svazu o n prvcích je svaz o $k \times n$ prvcích. Takže nutně platí $\tau(\mathbf{2^{2^k}}) \geqslant k$ a pro každý řetězec $\mathbf{n}$, máme $\tau(\mathbf{n}) = \lceil \log_2(\log_2(n)) \rceil$.

Definice: Řekneme, že je svaz S *jednoduchý,* jestliže $S \times S$ a id_S jsou jediné kongruence na S. Řekneme, že je svaz S *netriviálně jednoduchý,* jestliže S je jednoduchý a S má alespoň tři prvky.

Příklad 1.19 Jednoduše se ověří, že je svaz M_3 z obrázku 1.8 jednoduchý: označme 0, a, b, c a 1 prvky svazu M_3. Jestliže je například prvek a kongruentní prvku 0, pak je $b \vee 0$ kongruentní prvku $b \vee a$, a tedy je b kongruentní prvku 1. Stejně tak je c kongruentní prvku 1 a dostaneme, že $b \wedge c$ je kongruentní prvku $1 \wedge c$. Takže c je kongruentní prvku 0. Platí, že a je kongruentní 0 je kongruentní c je kongruentní 1 je kongruentní b a tedy tato kongruence je triviální.



Obrázek 1.8: Svaz M_3.

Dokážeme teď, že svaz, který se dostane jako semidirektní součin, má vždy kanonickou kongruenci, a tedy že, pokud má alespoň dva prvky, nemůže být nikdy jednoduchý.

Lemma 1.20 *Buď S jednoduchý svaz. Buď L semidirektní součin $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$, kde K, H jsou svazy. Pokud se svaz S vnořuje do L, pak se S vnořuje do K nebo do H.*

DŮKAZ: Nechť je θ kanonická kongruence na L a nechť je S' podsvaz svazu L izomorfní svazu S. Zúžená relace $\theta|_{S'}$ je kongruencí na S'. Poněvadž je S' jednoduchý, jsou jen dvě možnosti: buďto máme $S'/_{\theta} \cong \mathbf{1}$, a tedy S' se vnořuje do H, anebo θ je triviální, a tedy se S' vnořuje do K. ∎

Důsledek 1.21 *Třída $\mathcal{SD}$ neobsahuje žádný netriviálně jednoduchý svaz.*

DŮKAZ: Předpokládejme sporem, že existuje netriviálně jednoduchý svaz S v $\mathcal{SD}$. Poněvadž máme $S \ncong \mathbf{2}$, platí $\tau(S) \geqslant 1$. Existují tedy svazy K, H v $\mathcal{SD}$, splňující podmínky $\max\{\tau(K), \tau(H)\} < \tau(S)$ a $S \hookrightarrow K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ pro vhodná φ, ψ. Podle lemmatu 1.20 platí $S \hookrightarrow K$ nebo $S \hookrightarrow H$. Pak, podle definice máme $\tau(S) \leqslant \tau(K)$ nebo $\tau(S) \leqslant \tau(H)$, což je spor s volbou svazů K a H. ∎

Můžeme dokonce dostat silnější výsledek, ani homomorfní obrazy svazů třídy $\mathcal{SD}$ nejsou netriviálně jednoduché svazy.

Lemma 1.22 *Buď L svaz ze třídy $\mathcal{SD}$ a buď L' homomorfní obraz svazu L. Pokud má L' alespoň tři prvky, pak není jednoduchý.*

DŮKAZ: Předpokládejme sporem, že existuje svaz L v $\mathcal{SD}$, který se zobrazuje epimorfismem f na netriviálně jednoduchý svaz S. Předpokládejme, že je číslo $\tau(L)$ nejmenší možné. Podle definice, $\tau(L)$ je alespoň 1, a tak existují svazy K, H v $\mathcal{SD}$, splňující $\tau(L) > \max\{\tau(K), \tau(H)\}$ a $L \hookrightarrow K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$. Označme g kanonický epimorfismus z $K \ltimes_{\psi}^{\varphi} H$ na K. Homomorfismus g vytváří kongruenci η na svazu L. Označme θ obraz této kongruence η pomocí homomorphismu f. Tato relace je kongruencí na S. Jelikož je S jednoduchý, máme jen dvě možnosti: pokud θ je $S \times S$, celý svaz L patří do jedné třídy kongruence, a tak je L podsvazem svazu H, což je nemožné. Takže víme, že je kongruence θ menší než kongruence odpovídající homomorfismu f. A tak existuje homomorfismus h z $g(L)$ do S splňující $h \circ g = f$. Zobrazení f je epimorfismus, a tedy h je také epimorfismus. Takže $g(L)$, který je podsvazem K, se zobrazí na S, a to je spor s minimalitou $\tau(L)$. ∎

Dokážeme, že je třída $\mathcal{SD}$ uzavřená také na homomorfní obrazy. K tomuto použijeme tvrzení 1.16. Musíme nejdřív dokázat, že je třída $\mathcal{SD}$ uzavřená na konečné ordinální součty.

Lemma 1.23 *Buďte $L_1, L_2, \ldots, L_n$ pro n v $\mathbb{N}$ svazy z $\mathcal{SD}$. Pak svaz $\sum_{i=1}^{n} L_i$ také náleží do $\mathcal{SD}$.*

DŮKAZ: Bez újmy na obecnosti předpokládáme $n = 2$. Dokážeme nejdřív, že svaz $\mathbf{1} + L_2$ náleží do $\mathcal{SD}$. Uvažujme kartézský součin $L_2 \times \mathbf{2}$ s uspořádáním po složkách a definujme svaz K pomocí $K = \{(0_{L_2}, 0_{\mathbf{2}})\} \cup \{(l, 1_{\mathbf{2}});\ l \in L_2\}$. Platí $K \cong (\mathbf{1} + L_2)$.

Uvažujme nyní semidirektní součin $K \ltimes_{\varphi} L_1$, splňující $\varphi_{k,k'}(l) = 0_{L_1}$, pro všechna $k < k'$ v K a l v L_1. Definujme K' jako podsvaz svaz $\{(0_K, l);\ l \in L_1\} \cup \{(k, 0_{L_1});\ k > 0_K\}$. Vidíme, že je svaz K' izomorfní svazu $L_1 + L_2$. ∎

Díky tomuto lemmatu můžeme dokázat následující tvrzení:

Lemma 1.24 *Buď L svaz ze třídy $\mathcal{SD}$. Pokud je svaz L' homomorfním obrazem svazu L, pak L' náleží taktéž do $\mathcal{SD}$.*

DŮKAZ: Předpokládejme opak, tj. že existuje svaz L v $\mathcal{SD}$, svaz L' mimo $\mathcal{SD}$ a homomorfismus f z L na L'. Buď L' nejmenší takový vzhledem k počtu prvků. Podle lemmatu 1.22 svaz L' není jednoduchý, a tedy existuje netriviální kongruence θ na L'. Svaz $L'/_{\theta}$ je homomorfním obrazem svazu L, má méně prvků než svaz L' a tak podle předpokladu minimality svazu L' svaz $L'/_{\theta}$ náleží do $\mathcal{SD}$. Všechny třídy kongruence θ jsou svazy, které mají méně prvků než svaz L'. Ještě k tomu jsou všechny homomorfními obrazy podsvazů svazu L pomocí homomorphismu f, a tak všechny náleží do třídy $\mathcal{SD}$. Podle lemmatu 1.23 každý svaz, který se dostane jako ordinální součet tříd kongruence θ náleží také do $\mathcal{SD}$.

Tvrzení 1.16 nyní ukazuje, že se L' vnořuje do semidirektního součinu $L'/_\theta$ a ordinálního součtu tříd ekvivalence kongruence θ. Což je spor, neboť o L' se předpokládalo, že nepatří do třídy $\mathcal{SD}$. ∎

Definice: Řekneme, že je třída svazů $\mathcal{C}$ *uzavřená na krátké exaktní posloupnosti,* pokud svaz L náleží do $\mathcal{C}$, kdykoliv vlastní kongruenci θ takovou, že svaz $L/_\theta$ a všechny třídy kongruence θ náleží do $\mathcal{C}$.

Nyní sepíšeme vše, co víme o třídě $\mathcal{SD}$ následující formou:

Tvrzení 1.25 *Buď L konečný svaz. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*
(i) svaz L náleží do $\mathcal{SD}$;
(ii) svaz L neobsahuje žádný podsvaz který se zobrazuje na netriviálně jednoduchý podsvaz;
(iii) svaz L náleží do nejmenší třídy, která obsahuje svaz **2** *a která je uzavřená na podsvazy, na krátké exaktní posloupnosti a na izomorfní obrazy;*
(iv) svaz L náleží do největší třídy svazů uzavřené na podsvazy a na homomorfní obrazy, která neobsahuje žádný netriviálně jednoduchý podsvaz.

Důkaz: Implikace $(i) \Rightarrow (ii)$ je vyjádřena důsledkem 1.21. Opačný směr se dokáže indukcí podle počtu prvků. Buď L svaz, který splňuje (ii). Svaz L má alespoň tři prvky, takže není jednoduchý a existuje netriviální kongruence na L. Faktor a třídy ekvivalence musejí splňovat podmínku (ii) a dle indukčního předpokladu náleží do $\mathcal{SD}$. Zbytek plyne z tvrzení 1.16.

Implikace $(i) \Rightarrow (iii)$ je evidentní a ta obrácení platí podle tvrzení 1.16. Nyní $(i) \Rightarrow (iv)$ plyne z důsledku 1.20 a z tvrzení 1.24. Nakonec, $(iv) \Rightarrow (ii)$ je zřejmé. ∎

Stejný přístup se může použít pro polosvazy. Nebudeme zde dokazovat částečné výsledky, uvedeme pouze konečný výsledek:

Tvrzení 1.26 *Třída spojových polosvazů generovaná polosvazem* **2**, *která je uzavřená na spojové podpolosvazy a na semidirektní součiny, je třída všech konečných spojových podpolosvazů.*

Důkaz: Výsledek je analogie tvrzení 1.25 formulovaná pro spojové podpolosvazy. Poněvadž neexistuje žádný jednoduchý spojový podpolosvaz s alespoň třemi prvky, vyvodíme z toho znění tvrzení. ∎

Nyní si něco řekneme o třídě $\mathcal{SD}$ z pohledu variet a kvazivariet.

Definice: Řekneme, že třída svazů $\mathcal{C}$ je *varieta,* jestliže je uzavřená na podsvazy, na direktní součiny a na homomorfní obrazy. Řekneme, že je třída $\mathcal{C}$ *kvazivarieta,* jestliže je uzavřená na podsvazy, na direktní součiny a na izomorfní obrazy.

Víme, že třída $\mathcal{SD}$ je průnikem nějaké kvazivariety třídy konečných svazů: onou kvazivarietou je uzávěr třídy $\mathcal{SD}$ na nekonečné direktní součty a na podsvazy. Chtěli bychom vědět, zda-li $\mathcal{SD}$ není průnikem nějaké variety s třídou konečných svazů. Abychom mohli odpovědět na tuto otázku, popíšeme vztah mezi třídou $\mathcal{SD}$ a třídou svazů spojově semidistributivních.

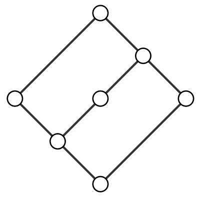
Definice: Řekneme, že je svaz L *spojově semidistributivní,* jestliže splňuje, pro všechny x, y, z v L, následující kvaziidentitu:

$$\text{z } x \vee y = x \vee z \text{ plyne } x \vee y = x \vee (y \wedge z). \tag{1.34}$$

Řekneme, že svaz L je *průsekově semidistributivní,* jestliže splňuje duální kvaziidentitu.

Lemma 1.27 *Třídy spojově semidistributivních svazů a průsekově semidistributivních svazů jsou vlastními podtřídami třídy $\mathcal{SD}$.*

Důkaz: Každý jednoduchý spojově semidistributivní svaz je triviální (viz [32]). Třída spojově semidistributivních svazů tvoří kvazivarietu (viz [32]). Každý homomorfní obraz konečného spojově semidistributivního svazu je také spojově semidistributivní (viz [21]). Takže tvrzení 1.25 (ii) ukazuje, že každý konečný spojově semidistributivní svaz náleží do $\mathcal{SD}$. Zbývá dokázat, že existuje svaz v $\mathcal{SD}$, který není spojově semidistributivní. Svaz L_3 z obrázku 1.9 není spojově semidistributivní (viz [32]), ale vnořuje se do semidirektního součinu $\mathbf{3} \ltimes_{\psi}^{\varphi} \mathbf{3}$ podle příkladu 1.7. A tak svaz L_3 je svaz, který náleží do $\mathcal{SD}$, ale není spojově semidistributivní. Výsledek pro průsekově semidistributivní svazy plyne z duality. ■



Obrázek 1.9: Svaz L_3.

Tvrzení 1.28 *Nejmenší kvazivarieta svazů, která obsahuje svaz* **2** *a která je uzavřená na semidirektní součiny není varietou.*

Důkaz: Označme $\mathcal{DSD}$ kvazivarietu ze znění tvrzení. Je známo (viz [21]), že nejmenší varieta, která obsahuje všechny konečné spojově semidistributivní svazy je varieta všech svazů. Třída $\mathcal{SD}$ obsahuje všechny konečné spojově semidistributivní svazy podle lemmatu 1.27. Předpokládejme, že by třída $\mathcal{DSD}$ byla uzavřena na homomorfní obrazy. Třída $\mathcal{DSD}$ by obsahovala třídu $\mathcal{SD}$, a tak by musela obsahovat všechny svazy. Přesto ale lemma podobné lemmatu 1.20 platí pro třídu $\mathcal{DSD}$, a tak žádný netriviálně jednoduchý svaz nenáleží do $\mathcal{DSD}$. A to by byl spor s předpokladem, že je $\mathcal{DSD}$ uzavřená na homomorfní obrazy. ■

Tento výsledek může být vyjádřen jinými slovy: neexistuje žádná varieta svazů $\mathcal{C}$ taková, že třída $\mathcal{SD}$ je průsekem třídy $\mathcal{C}$ a třídy konečných svazů. Nicméně existuje taková kvazivarieta. Každá kvazivarieta je popsána systémem kvaziidentit. A tak se nabízí následující otázka:

Otázka 1.29 Jaké kvaziidentity popisují třídu $\mathcal{SD}$?

Kapitola 2

Konstrukce slabého uspořádání na Coxeterových grupách

V této kapitole studujeme Coxeterovy grupy, třídu grup, která obsahuje, mezi jinými, symetrické grupy. Na těchto grupách se definuje kanonické uspořádání zvané slabé uspořádání $\preccurlyeq$. Toto uspořádání tvoří průsekový polosvaz, v případě, že je Coxeterova grupa nekonečná, nebo svaz, v případě konečné Coxeterovy grupy.

Pro každou Coxeterovu grupu W a pro každou standardní parabolickou podgrupu W_J popíšeme rozklad polosvazu slabého uspořádání na grupě W jako semidirektní součin polosvazu slabého uspořádání na podgrupě W_J a slabého uspořádání na libovolné levé třídě vzhledem k W_J. Tento rozklad umožňuje speciálně konkrétní konstrukci slabé uspořádání na W ze slabého uspořádání standardní parabolické podgrupy W_J a příslušné levé rozkladové třídy.

V sekci 1 připomeneme některé základní vlastnosti Coxeterových grup. V sekci 2 představíme konstrukci semidirektního součinu slabého uspořádání Coxeterových grup v obecném případě. Nakonec v sekci 3 popíšeme konkrétní příklady, a to grupy typů ireducibilních, A_n, B_n, D_n, I_m, H_3 a $\tilde{A}_2$.

2.1 Slabé uspořádání na Coxeterových grupách

V této sekci definujeme Coxeterovy grupy, slabé uspořádání, standardní parabolické podgrupy a připravíme si některé výsledky pro použití v následujícím textu. Začneme pochopitelně definicí Coxeterovy grupy.

Definice [27]: *Coxeterův graf* $\Gamma = (S, A)$ je konečný neorientovaný graf, jehož každá hrana (s, t) z A je označena číslem $m_{s,t}$ z množiny $\{3, 4, \ldots, \infty\}$. Řekneme, že grupa W

je *Coxeterova grupa* příslušející Coxeterovu grafu $\Gamma = (S, A)$, jestliže má prezentaci

$$\begin{aligned} \langle\, S;\ s^2 = 1, (st)^2 = 1 &\quad \text{pro } (s,t) \notin A, \\ (st)^{m_{s,t}} = 1, &\quad \text{pro } (s,t) \in A \text{ a } m_{s,t} < \infty \,\rangle. \end{aligned} \tag{2.1}$$

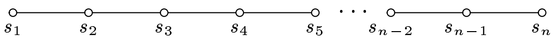
Řekneme, že dvojice (W, S) je *Coxeterův systém,* jestliže je W grupa a jestliže existuje Coxeterův graf $\Gamma = (S, A)$, ke kterému přísluší grupa W. Pro každý prvek g z W definujeme *délku* $\ell(g)$ jako minimální délku posloupnosti $s_1, s_2, \ldots, s_k$ s s_i v S splňující $g = s_1 s_2 \cdots s_k$. Slovo $s_1 s_2 \cdots s_k$ je následně nazýváno *redukované vyjádření.*

Pro dva generátory s a t, kteří komutují, definujeme $m_{s,t} = 2$, abychom usnadnili zápis prezentace. Když kreslíme Coxeterův graf, vynecháváme obvykle značky 3, které jsou nejčastější.

Příklad 2.1 Typickým příkladem Coxeterovy grupy je symetrická grupa na $n+1$ prvcích, značená S_{n+1}. Tato grupa je generována n transpozicemi $(i, i+1)$, značenými s_i, a tyto transpozice splňují vztahy

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i &\qquad \text{pro } |i-j| > 1, \\ s_i s_j s_i &= s_j s_i s_j &\qquad \text{pro } |i-j| = 1. \end{aligned}$$

Tyto relace utvářejí prezentaci grupy S_{n+1} (viz [27]), a tedy S_{n+1} je Coxeterova grupa. Příslušný Coxeterův graf je graf



Délka $\ell(\pi)$ permutace π je rovna počtu uspořádaných dvojic (i, j), s $1 \leqslant i < j \leqslant n$, které splňují $\pi(i) > \pi(j)$, viz [12].

Je možné vidět, že v Coxeterově grupě platí $\ell(g) = 0$ tehdy a jen tehdy, když je g jednotkový prvek, a že platí $\ell(g) = \ell(g^{-1})$ pro každé g, a nakonec že platí $\ell(g) + \ell(h) \geqslant \ell(g+h)$, pro všechna g, h v Coxeterově grupě W.

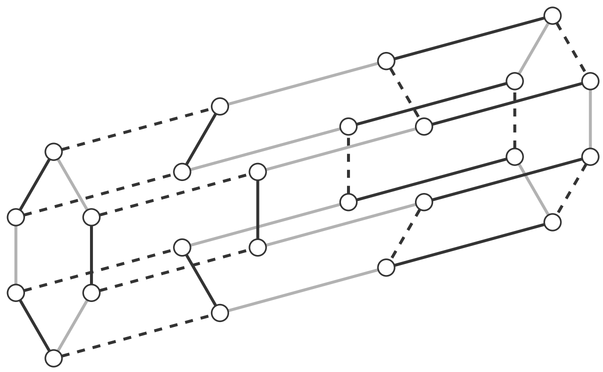
Definice: Ať je W Coxeterova grupa. Pro g, h v W píšeme $g \preccurlyeq h$ tehdy a jen tehdy, máme-li $\ell(g) + \ell(g^{-1}h) = \ell(h)$. Tato relace se nazývá *slabé uspořádání* grupy W.

Ekvivalentní definice je následující (viz [27]): máme $g \preccurlyeq h$ když existuje u, redukované vyjádření prvku g, a prvky $s_1, s_2, \ldots, s_k$ v S takové, že $us_1 s_2 \ldots s_k$ je redukované vyjádření prvku h. Z této definice je už vidět, že je relace $\preccurlyeq$ částečné uspořádání. Ve zbytku textu budou slova: „g je menší než h“ pro g, h pro prvky Coxeterovy grupy, znamenat vždy slabé uspořádání zde definované.

Máme-li konečnou Coxeterovu grupu W, pak existuje právě jeden prvek v W, jehož délka je maximální. Tento prvek je značen w_0. V případě symetrické grupy S_n je prvkem w_0 permutace $i \mapsto n+1-i$.

Tvrzení 2.2 [3] *Buď W Coxeterova grupa. Pak je množina $(W, \preccurlyeq)$ průsekovým polosvazem a prvek 1 je nejmenším prvkem. Pokud je W konečná, pak je $(W, \preccurlyeq)$ svaz a prvek w_0 je největším prvkem.*

Vidíme, že v množině $(W, \preccurlyeq)$ je prvek h bezprostřední následník prvku g tehdy a jen tehdy, pokud platí $h = gs$ pro nějaké s v S. Z druhé strany, máme-li $h = gs$ pro nějaké s v S, pak jeden z prvků g a h je bezprostřední následník druhého. Takže Hasseův diagram polosvazu $(W, \preccurlyeq)$ se dostane Caleyova grafu grupy W smazáním značek. Když sestrojíme Hasseův diagram polosvazu $(W, \preccurlyeq)$ a označíme každou hranu příslušným generátorem, dostaneme Cayleyův graf grupy W. Když říkáme „Cayleyův graf Coxeterovy grupy W“, míníme tím Cayleyův graf grupy W vzhledem k presentaci (2.1). Poněvadž jsou všechny generátory involutivní, pro každou hranu existuje opačná hrana označená stejným generátorem. A proto kreslíme spíše neorientované hrany namísto dvou opačných orientovaných hran (viz obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Cayleyův graf symetrické grupy S_4 nakreslený jako Hasseův diagram slabého uspořádání – prvek h je bezprostřední následník prvku g, jestliže hrana mezi nimi stoupá z g do h. Černé hrany v tomto grafu vyznačují transpozici (1,2), šedé vyznačují transpozici (2,3) a přerušované vyznačují transpozici (3,4).

Představíme nyní pojem podgrupy W, která je generována podmnožinou generátorů grupy W.

Tvrzení 2.3 [27] *Buď W Coxeterova grupa příslušející Coxeterovu grafu $\Gamma = (S, A)$. Buď J podmnožina množiny S. Pak je podgrupa generovaná množinou J Coxeterovou grupou příslušející podgrafu grafu Γ generovanému množinou J.*

Definice: Podgrupa z tvrzení 2.3 se značí W_J a je nazývána *standardní parabolická podgrupa* grupy W generovaná množinou J.

Je vhodné zmínit, že definice délky ℓ nezáleží na grupě, v tom smyslu, že pro prvek g v W_J délky g v W a v W_J jsou shodné. Stejně tak pro slabé uspořádání, pro dva prvky g a h v W_J platí $g \preccurlyeq h$ v W_J tehdy a tehdy, platí-li $g \preccurlyeq h$ v W.

Definice: Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Řekneme, že prvek g grupy W je *J-redukovaný,* jestliže platí $\ell(sg) = \ell(g) + 1$ pro všechna s v J. Množinu všech J-redukovaných prvků v W značíme W^J.

Příklad 2.4 Grupa S_n je standardní parabolickou podgrupou grupy S_{n+1}. Tato podgrupa je generována množinou $J = \{(i, i+1); i < n-1\}$. J-redukované permutace jsou cykly $(i, i+1, \ldots, n+1)$ pro každé $i \leqslant n+1$.

Následující výsledek je standardní:

Lemma 2.5 [4] *Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Buď g prvek grupy W. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*
(i) Prvek g je J-redukovaný;
(ii) Prvek g má nejkratší délku v rozkladové třídě $W_J g$;
(iii) Prvek g je jediným prvkem nejkratší délky ve třídě $W_J g$;
(iv) Pro každé h v W^J platí $\ell(hg) = \ell(h) + \ell(g)$;
(v) Pro každé h v W relace $h \preccurlyeq g$ implikuje, že h je J-redukovaný;

Pro každý prvek g v W můžeme nalézt právě jeden prvek g'', který je jediným J-redukovaným prvkem v rozkladové třídě $W_J g$. Ať je g' prvek gg''^{-1}. Dostáváme zde jednoznačný rozklad prvku g ve formě $g'g''$, kde g' náleží do W_J a g'' náleží do W^J.

Definice: Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Definujeme zobrazení $\alpha_J : W \to W_J$ a $\omega_J : W \to W^J$ tak, abychom měli $g = \alpha_J(g)\omega_J(g)$ pro každé g v W.

Pomocí definice s lemmatem 2.5 dostaneme okamžitě následující tvrzení:

Tvrzení 2.6 *Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Pak je zobrazení $g \mapsto \big(\alpha_J(g), \omega_J(g)\big)$ bijekce mezi množinou W a množinou $W_J \times W^J$.*

Zakončíme tuto sekci klasickým výsledkem:

Lemma 2.7 [18] *Nechť je (W, S) Coxeterův systém a nechť je J podmnožina S. Nechť jsou h v W^J a s v S. Pak nastane právě jedna z následujících situací:*
(i) platí $\ell(h) \geqslant \ell(hs)$, v tomto případě prvek hs je také J-redukovaný;
(ii) platí $\ell(h) \leqslant \ell(hs)$ a hs náleží do W^J;
(iii) platí $\ell(h) \leqslant \ell(hs)$ a hs nenáleží do W^J, v tomto případě existuje nějaké s' v J splňující $hs = s'h$.

2.2 Semidirektní součiny v Coxeterových grupách

V této sekci studujeme rozklad Coxeterovy grupy vytvářený zobrazeními α_J a ω_J. Dokážeme, že tento rozklad je vhodný pro semidirektní součin polosvazů.

Lemma 2.8 *Buď (W,S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Buďte g,h v W. Pak*
(i) $g \preccurlyeq h$ implikuje $\alpha_J(g) \preccurlyeq \alpha_J(h)$ a $\omega_J(g) \preccurlyeq \omega_J(h)$;
(ii) pokud je h bezprostřední následník prvku g v W, pak platí buďto $\alpha_J(g) = \alpha_J(h)$, anebo $\omega_J(g) = \omega_J(h)$;
(iii) platí $\alpha_J(g \wedge h) = \alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)$.

DŮKAZ: Body (i) a (ii) jsou důsledky lemmatu 2.7.

(iii) Podle bodu (i), platí $\alpha_J(g\wedge h) \preccurlyeq \alpha_J(g)\wedge\alpha_J(h)$. Ale platí $\alpha_J(g) \preccurlyeq g$ a $\alpha_J(h) \preccurlyeq h$, a tak platí $\alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h) \preccurlyeq g \wedge h$. Použitím α_J na tuto nerovnost dostaneme $\alpha_J(\alpha_J(g) \wedge \alpha_J(h)) \preccurlyeq \alpha_J(g\wedge h)$. Ale α_J je identické na W_J, a tak dostaneme $\alpha_J(g)\wedge\alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g\wedge h)$. ∎

Zobrazení α_J je tedy slučitelné s průsekem, což znamená, že to je endomorfismus průsekového polosvazu $(W, \preccurlyeq)$. V následujícím lemmatu nahlížíme na Hasseův diagram polosvazu $(W, \preccurlyeq)$ jako na Cayleyův graf grupy W.

Lemma 2.9 *Buď (W,S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Pro g,h v W definujeme relaci θ_J předpisem $(g,h) \in \theta_J \Leftrightarrow \alpha_J(g) = \alpha_J(h)$. Relace θ_J je kongruence průsekového polosvazu $(W, \preccurlyeq)$ a polosvaz $(W, \preccurlyeq)/_{\theta_J}$ je izomorfní polosvazu $(W_J, \preccurlyeq)$. Všechny třídy ekvivalence jsou izomorfní jakožto svazy a navíc, když přidáme označení, příslušné označené grafy jsou také izomorfní.*

DŮKAZ: Víme, že α_J je homomorfismus z $(W, \preccurlyeq)$ na $(W_J, \preccurlyeq)$. Takže θ_J je kongruence a $(W, \preccurlyeq)/_{\theta_J}$ je izomorfní polosvazu $(W_J, \preccurlyeq)$. Zbývá dokázat, že třídy ekvivalence jsou izomorfní. Když máme $a \neq b$ v W_J, tak existuje bijekce $\eta_{a,b}$ mezi třídou obsahující a a třídou obsahující b. Tato bijekce posílá ag na bg pro každé g v W^J. Ale tato bijekce zachovává uspořádání $\preccurlyeq$: pro všechna g,h v W^J platí $ag \preccurlyeq ah \Leftrightarrow g \preccurlyeq h \Leftrightarrow bg \preccurlyeq bh$ podle lemmatu 2.5. Takže bijekce $\eta_{a,b}$ je izomorfismus svazů. Je evidentní, že $\eta_{a,b}$ zachovává také označení: hrana z ag do agx je označena generátorem x a to platí také pro hranu z bg do bgx. ∎

Máme už připraveny všechny potřebné výsledky a můžeme dokázat hlavní výsledek této sekce.

Věta 2.10 *Buď (W,S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Pak je průsekový polosvaz $(W, \preccurlyeq)$ izomorfní semidirektnímu součinu polosvazů $(W_J, \preccurlyeq)$ a $(W^J, \preccurlyeq)$.*

DŮKAZ: Výsledek dostaneme použitím tvrzení 1.14, verze pro průsekové polosvazy, s lemmaty 2.8 a 2.9. ■

V případě konečné Coxeterovy grupy W tvoří uspořádaná množina $(W, \preccurlyeq)$ svaz, a tak bychom chtěli vědět, zda-li je zobrazení α_J slučitelné s operací spojení. Je tomu tak, dokážeme, že zobrazení α_J je slučitelné se spojením, a tedy, že je α_J endomorfismus svazu $(W, \preccurlyeq)$. Můžeme dokonce formulovat výsledek obecněji a nepředpokládat, že je W konečná.

Lemma 2.11 *Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Buďte g, h v W taková, že $g \vee h$ existuje. Pak $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)$ existuje a platí $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h) = \alpha_J(g \vee h)$.*

DŮKAZ: Platí $\alpha_J(g) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$ a $\alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$, takže spojení musí existovat. Navíc platí $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h) \preccurlyeq \alpha_J(g \vee h)$. Z $g \preccurlyeq g \vee h$ a z definice zobrazení ψ dostaneme $\omega_J(g) \preccurlyeq \psi_{\alpha_J(g\vee h),\alpha_J(g)}(\omega_J(g \vee h))$. Uvažujme nyní prvek $j = \psi_{\alpha_J(g\vee h),\alpha_J(g)\vee\alpha_J(h)}(\omega_J(g \vee h))$. Předchozí pozorování s lemmatem 1.15 (iii) dává $\omega_J(g) \preccurlyeq \psi_{\alpha_J(g)\vee\alpha_J(h),\alpha_J(g)}(j)$, což dává $g \preccurlyeq (\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)j)$. To samé může být řečeno o h, a tak $\alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)j$ je horní mez prvků g a h a máme $\alpha_J(g \vee h) \preccurlyeq \alpha_J(g) \vee \alpha_J(h)$. ■

Můžeme nyní formulovat výsledek podobný větě 2.10 pro konečné Coxeterovy grupy:

Věta 2.12 *Buď (W, S) Coxeterův systém takový, že W je konečná a buď J podmnožina S. Pak je svaz $(W, \preccurlyeq)$ izomorfní semidirektnímu součinu svazů $(W_J, \preccurlyeq)$ a $(W^J, \preccurlyeq)$.*

DŮKAZ: Zobrazení α_J je slučitelné s oběma svazovými operacemi, a tak se jedná o homomorfismus. Následně věta vyplývá z tvrzení 1.4. ■

Víme nyní, že je Cayleyův graf Coxeterovy grupy semidirektním součinem, ale nevíme přesně jakým, je třeba popsat zobrazení ψ. Podáme algoritmus, který sestrojí toto zobrazení v případě konkrétní Coxeterovy grupy W. K tomuto potřebujeme následující pomocné lemma:

Označení: Označíme $[s, s'\rangle^m$ pro $\underbrace{ss'ss'\cdots}_{m \text{ činitelů}}$ a $\langle s, s']^m$ pro $\underbrace{\cdots ss'ss'}_{m \text{ činitelů}}$.

Lemma 2.13 [4] *Buď (W, S) Coxeterův systém. Buď g v W a buďte $s \neq s'$ v S.*
(i) Pokud platí $\ell(gs) = \ell(gs') = \ell(g) + 1$, pak prvek $(gs) \vee (gs')$ existuje tehdy a jen tehdy, pokud číslo $m_{s,s'}$ je konečné; v tom případě máme $(gs) \vee (gs') = g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$.
(ii) Pokud platí $\ell(gs) = \ell(gs') = \ell(g) - 1$, pak je číslo $m_{s,s'}$ konečné a platí $(gs) \wedge (gs') = g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$.

Všimli jsme si v lemmatu 1.15, že stačí popsat, kdy je (k', h) bezprostřední následník prvku $(k, \psi_{k',k}(h))$. Podle lemmatu 2.8 (ii) máme nutně $h = \psi_{k,k'}(h)$.

Definice: Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Trojice $((k, h), (k', h), s)$, s k a k' v W_J, h v W^J a s v S, se nazývá *speciální trojice,* jestliže je prvek k' bezprostřední následník prvku k v W_J, prvek $k'h$ je bezprostřední následník prvku kh v W a platí $k'h = khs$. Označíme $T_{k,k'}$ množinu všech speciálních trojic ve formě $((k, h), (k', h), s)$ s h v W^J a s v S.

Naším cílem je popsat zobrazení ψ. Podle toho, co jsme viděli, stačí popsat speciální trojice.

Lemma 2.14 *Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Buď g v W^J a buď s v S takové, že prvek gs není J-redukovaný. Předpokládejme, že generátor s' v S splňuje $g \preccurlyeq gs'$, že prvek gs' je J-redukovaný a že $m_{s,s'}$ je konečné. Pak je prvek $g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$ bezprostředním následníkem prvku $g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}$, a prvek $g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}$ je J-redukovaný.*

DŮKAZ: Víme, že prvek gs není J-redukovaný a dle lemmatu 2.7 prvek $t = \alpha_J(gs)$ je v S. Posléze lemma 2.13 dává $(gs) \vee (gs') = g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$. Poněvadž je zobrazení α_J slučitelné se spojením, nalezneme $\alpha_J(g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}) = t$. Máme nutně $\alpha_J(g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}) \preccurlyeq t$. Pokud by tento vztah byl rovností, pak by byl prvek $(g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}) \wedge (gs)$, který je g, J-redukovaný. Takže $\alpha_J(g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1})$ je ostře menší než t, a to implikuje, že $g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}$ je J-redukovaný. ∎

Lemma 2.15 *Buď (W, S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Buď $g \neq 1$ v W^J a buď s v S takové, že prvek gs není J-redukovaný. Pak existují $g' \preccurlyeq g$ a s' v S takové, že je $m_{s,s'}$ konečné, platí $g'[ss'\rangle^{m_{s,s'}} = gs$ a buďto prvek $g's$, anebo prvek $g's'$ jsou J-redukované.*

DŮKAZ: Existuje s' v S splňující $gs' \preccurlyeq g$. Podle lemmatu 2.7, existuje prvek t v S, který splňuje $tg = gs$. Takže platí $gss' = tgs' \preccurlyeq tg = gs$. Označme g' prvek $g \wedge gss'$. Podle lemmatu 2.13 platí $g' = gss \wedge gss' = gs[s, s'\rangle^{m_{s,s'}} = g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-1}$. Prvky g' a $g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-2}$ jsou J-redukované podle lemmatu 2.5 (v). Nyní je prvek $g's$ jeden z prvků $g[s', s\rangle^{m_{s,s'}-2}, g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$ a prvek $g's'$ je ten druhý. Poněvadž platí $gs = g'[s, s'\rangle^{m_{s,s'}} = g's \vee g's'$, nutně $g[s, s'\rangle^{m_{s,s'}}$ není J-redukovaný. ∎

Tvrzení 2.16 *Nechť je (W, S) Coxeterův systém a nechť je J podmnožina S. Nechť k v W_J a s v J splňují $k \preccurlyeq ks$. Mějme $h \neq 1$ v W^X. Pak je prvek ksh bezprostředním následníkem prvku kh tehdy a jen tehdy, pokud existují $g \preccurlyeq h$ a s', s'' v S takové, že $m_{s',s''}$ je konečné a platí $kg[s', s''\rangle^{m_{s',s''}-1} = kh$ a $\alpha_J(kgs'') = ks$. Navíc platí $ksh = khs'$, pro $m_{s',s''}$ liché, a $ksh = khs''$, pro $m_{s',s''}$ sudé.*

DŮKAZ: Nic se nezmění, pokud vynásobíme všechny prvky nalevo prvkem k^{-1}. Takže dokazovaná ekvivalence může být formulována takto: sh je bezprostřední následník prvku h tehdy a jen tehdy, pokud existují $g \preccurlyeq h$ a s', s'' v S takové, že $m_{s',s''}$ je konečné, platí $g[s', s''\rangle^{m_{s',s''}-1} = h$ a $\alpha_X(gs'')$ je rovno s. Směr '$\Leftarrow$' plyne přímo z lemmatu 2.14 a směr '$\Rightarrow$' plyne přímo z lemmat 2.8 (ii) a 2.15. Takže zbývá pouze dokázat vztah $sh = hs'$ (popř. $sh = hs''$). Předpokládejme $m_{s',s''}$ liché. Víme, že $\alpha_J(gs'')$ je s. Takže existuje prvek g' v W^X takový, že sg' je bezprostřední následník prvku g. Podle lemmatu 2.8 platí $g' = g$. Nyní nalezneme

$$sh = sg[s', s''\rangle^{m_{s',s''}-1} = gs''[s', s''\rangle^{m_{s',s''}-1} = g[s', s''\rangle^{m_{s',s''}} = g[s', s''\rangle^{m_{s',s''}-1}s' = hs'.$$

Případ $m_{s',s''}$ sudého je podobný. ∎

Z tvrzení 2.16 odvodíme algoritmickou metodu pro rekurzivní konstrukci množiny $T_{k,k'}$. Podle lemmatu 1.15 tato množina jednoznačně určuje zobrazení ψ uvažovaného semidirektního součinu.

Algoritmus 2.17 Buď (W, S) Coxeterova grupa a buď J podmnožina S. Zvolme pevně lineární uspořádání $\leqslant$ na W^J, které rozšiřuje uspořádání $\preccurlyeq$. Buďte $k \preccurlyeq k'$ dva prvky v W_J, splňující $k' = ks$ pro nějaký prvek s v S. Sestrojíme množinu T trojic tvaru $((k, h), (k', h), s')$ s h v W^J a s' v S, následujícím způsobem: Inicializujeme T na trojici $\{((k, 1), (k', 1), s)\}$. Pokračujeme indukcí podle délky h v W^J a začneme prvkem $h = 1$. Předpokládejme $((k, h), (k', h), s') \in T$. Uvážíme postupně všechny prvky s'' v S, které splňují $hs'' \in W^J$ a $m_{s',s''} < \infty$: pro každý takový prvek, přidáme do množiny T trojici

$$((k, h[s'', s'\rangle^{m_{s',s''}-1}),\ (k', h[s'', s'\rangle^{m_{s',s''}-1}),\ s'), \tag{2.2}$$

pro $m_{s',s''}$ sudé nebo trojici

$$((k, h[s'', s'\rangle^{m_{s',s''}-1}),\ (k', h[s'', s'\rangle^{m_{s',s''}-1}),\ s''), \tag{2.3}$$

pro $m_{s',s''}$ liché. Pak pokračujeme s následujícím prvkem h v uspořádání $\leqslant$.

Lemma 2.18 *Algoritmus 2.17 dodá množinu $T_{k,k'}$.*

DŮKAZ: Dokážeme nejdřív, že každý prvek množiny T náleží do $T_{k,k'}$. Platí $ks = k'$, a tak $((k, 1), (k', 1), s)$ je speciální trojice. Poté, pokud je $((k, h), (k', h), s')$ speciální trojice, podle tvrzení 2.16 je (2.2) nebo (2.3) speciální trojice.

Na druhou stranu dokážeme indukcí podle h, že každá speciální trojice náleží do T. Tvrzení je pravdivé pro trojici $((k, 1), (k', 1), k^{-1}k)$. Předpokládejme $((k, h), (k', h), s')$ v $T_{k,k'}$ s $h \neq 1$. Tvrzení 2.16 zajišťuje existenci prvku s'' v S a prvku $g \preccurlyeq h$ v W^J, které splňují $g\langle s', s'']^{m_{s',s''}-1} = h$ a $k'g = kgt$, kde t je buďto s', anebo s''. Platí $g < h$, trojice $((k, g), (k', g), t)$ je speciální, a tak podle indukčního předpokladu tato trojice náleží do T. Trojice $((k, h), (k', h), s')$ se dostane z trojice $((k, g), (k', g), t)$ pomocí (2.2) nebo (2.3), a tak náleží do T. ∎

Tvrzení 2.19 *Buď (W,S) Coxeterův systém a buď J podmnožina S. Pak je operace průseku v polosvaze $(W,\preccurlyeq)$ určena operacemi průseku v polosvazech W_J a W^J formulí*

$$(k,h)\wedge(k',h')=(k\wedge k',\psi_{k,k'}(h)\wedge\psi_{k',k}(h')), \tag{2.4}$$

kde zobrazení ψ je dáno algoritmem 2.17.

DŮKAZ: Formule (2.4) je definice (1.18) průseku v semidirektním součinu polosvazů. Máme-li dány operace průniku v podpolosvazech W_J a W^J, stačí pouze umět určit zobrazení ψ. Podle výsledků kapitoly 1 se toto zobrazení sestrojuje následovně:
- pro $k'\preccurlyeq k$ je zobrazení $\psi_{k',k}$ identita podle (1.6) a (1.15);
- pro k,k' nesrovnatelné platí $\psi_{k',k}=\psi_{k',k\wedge k'}$ podle (1.15);
- pro $k\prec k'$, je-li $s_1s_2\cdots s_k$ redukované vyjádření prvku $k^{-1}k'$, dostaneme, podle lemmatu 1.15 (i):

$$\psi_{k',k}=\psi_{s_1,1}\circ\psi_{s_1s_2,s_1}\circ\psi_{s_1s_2s_3,s_1s_2}\circ\cdots\circ\psi_{s_1s_2\cdots s_k,s_1s_2\cdots s_{k-1}}; \tag{2.5}$$

- pro k', bezprostředního následníka prvku k, platí podle lemmatu 1.15 (ii):

$$\psi_{k',k}(h)=\max\{h'\in W^J;\ (h'\preccurlyeq h)\text{ a }(((k,h'),(k',h'),s)\in T_{k,k'}),\ \text{pro } s\in S\}. \tag{2.6}$$

Konstrukce množiny $T_{k,k'}$ je popsána algoritmem 2.17. ∎

Podobný výsledek může být formulován pro operaci spojení v případě konečné Coxeterovy grupy.

Struktura množiny $T_{k,k'}$ záleží pouze na prvku $k^{-1}k'$, označeném s, a ne vlastně na dvojici k,k'. Přesněji řečeno, pro nějaké prvky h v W^J a s' v S, trojice $((k,h),(k',h),s')$ náleží do $T_{k,k'}$ tehdy a jen tehdy, pokud trojice $((1,h),(s,h),s')$ náleží do množiny $T_{1,s}$. Takže usoudíme. že zobrazení $\psi_{k',k}$ je rovno zobrazení $\psi_{k^{-1}k',1}$, a tedy stačí popsat zobrazení ψ (a speciální trojice) pro dvojice $(s,1)$ s s v J.

Poznámka 2.20 V [41] je slabé uspořádání konečné Coxeterovy grupy W sestrojováno pomocí zobrazení f z $W^J\times J$ do $S\cup\{\emptyset\}$ definovaného takto: je-li ks bezprostřední následník prvku k v W^J, s s v X, pak pro každé h v W^X je buďto $f(h,s)$ prázdné, když ksh není následník prvku kh, anebo platí $ksh=khf(h,s)$. Tato metoda je ekvivalentní té naší: pro každou množinu speciálních trojic definujeme $f(h,s)$ jako s', pokud $((1,h),(s,h),s')$ je speciální trojice, anebo jako $\emptyset$, pokud sh není větší než h. Rozdíl je v tom, že Le Conte de Poly-Barbut zavádí svou metodu přímým kombinatorickým postupem a že není jasné, jak sestrojit operace spojení a průseku ze zobrazení f a ze svazových operací menších svazů.

2.3 Příklady Coxeterových grup

V této sekci představíme konstrukci semidirektního součinu slabého uspořádání na konkrétních příkladech Coxeterových grup. Konstrukci provedeme pro všechny nekonečné řady Coxeterových grup a také pro jednu výjimečnou konečnou Coxeterovu grupu a jednu nekonečnou grupu.

Ve všech případech zvolíme podmnožinu J tak, aby množina J-redukovaných prvků šla snadno popsat. Popis množin W^J lze nalézt v [23], a proto zde neuvádíme důkaz složení množin W^J. Popíšeme také zobrazení φ a ψ, která jsou určena speciálnímu trojicemi $T_{k,k'}$. Stačí popsat množiny trojic T_{1,s_1}, které budou značeny T_{s_1}.

Množina T_{s_1} popisuje zobrazení φ_{1,s_1} a v nejdůležitějších případech dodáme podgraf Cayleyova grafu, který odpovídá množinám W^J a s_iW^J a který tedy dobře ilustruje zobrazení φ_{1,s_1}. Poté, jelikož je polosvaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektním součinem W_J a W^J, dostaneme Cayleyův graf grupy W nahrazením každého vrcholu Cayleyova grafu grupy W_J Cayleyho grafem množiny W^J a nahrazením každé hrany v W_J odpovídajícími hranami popsanými speciálními trojicemi.

2.3.1 Reducibilní typy

Definice: Řekneme, že je Coxeterova grupa *reducibilní,* pokud je příslušný Coxeterův graf souvislý.

Tento případ Coxeterových grup je snadný, poněvadž parabolické podgrupy příslušející komponentám Coxeterova grafu navzájem komutují.

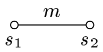
Tvrzení 2.21 *Buď Γ nesouvislý Coxeterův graf. Označme W Coxeterovu grupu příslušející Γ. Označme $\Gamma_1 = (S_1, A_1), \dots, \Gamma_k = (S_k, A_k)$ souvislé komponenty grafu Γ a označme W_i grupu generovanou množinou S_i, pro i mezi 1 a k. Pak je polosvaz $(W, \preccurlyeq)$ izomorfní direktnímu součinu $\prod_{i=1}^{k}(W_i, \preccurlyeq)$.*

DŮKAZ: Jelikož množiny S_i navzájem komutují, grupy W_i navzájem komutují a grupa W je izomorfní direktnímu součinu $\prod_{i=1}^{k} W_i$. Pro všechny prvky g a h z W mějme $g = g_1g_2\cdots g_k$ a $h = h_1h_2\cdots h_k$, s g_i a h_i v W_i. Platí $g \wedge h = (g_1 \wedge h_1)(g_2 \wedge h_2)\cdots(g_k \wedge h_k)$ a $g \vee h = (g_1 \vee h_1)(g_2 \vee h_2)\cdots(g_k \vee h_k)$ a polosvaz $(W, \preccurlyeq)$ je izomorfní direktnímu součinu $\prod_{i=1}^{k}(W_i, \preccurlyeq)$. ∎

Direktní součin je speciální případ semidirektního součinu. Vyřešili jsme reducibilní případ, a tak ostatní uvažované případy budou ireducibilní.

2.3.2 Typ $\mathsf{I_m}$

Coxeterův graf typu I_m pro $m \geqslant 3$ je následující:

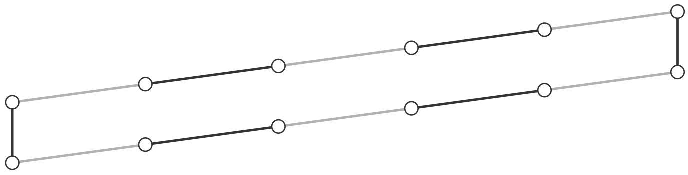


Příslušná Coxeterova grupa W je dihedrální grupa. Pro konstrukci semidirektního součinu zvolíme množinu $J = \{s_1\}$. Množina W^J sestává z prvků $[s_2 s_1\rangle^k$, pro k mezi 0 a $m-1$ (viz [23]). Připomínáme, že $\mathbf{k}$ označuje řetězec o k prvcích.

Tvrzení 2.22 *Svaz slabého uspořádání Coxeterovy grupy typu I_m je izomorfní semidirektnímu součinu $\mathbf{2} \ltimes^{\varphi} \mathbf{m}$, kde zobrazení φ je definováno jako $\varphi_{0_\mathbf{2},1_\mathbf{2}}(0_\mathbf{m}) = 0_\mathbf{m}$ a $\varphi_{0_\mathbf{2},1_\mathbf{2}}(h) = 1_\mathbf{m}$, pro $h \neq 0_\mathbf{m}$.*

DŮKAZ: Jak už jsme se zmínili, uvažujeme podgrupu $W_{\{s_1\}}$. Dostaneme, podle algoritmu 2.17, že množina T_{s_1} sestává ze dvou speciálních trojic: a to $((1,1),(s_1,1),s_1)$ a $((1,[s_2s_1\rangle^{m-1}),(s_1,[s_2s_1\rangle^{m-1}),s_i)$, kde i je 1, pro m liché, a 2 pro m sudé. ∎

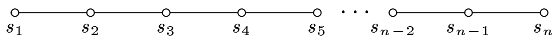
Vidíme příklad svazu slabého uspořádání pro $m = 6$ na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Cayleyův graf Coxeterovy grupy typu I_6: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2

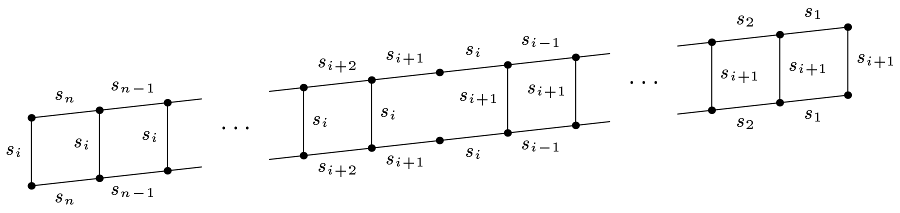
2.3.3 Typ $\mathsf{A_n}$

Coxeterův graf typu A_n pro $n \geqslant 1$ je následující:



Příslušná grupa je symetrická grupa S_{n+1} (viz příklad 2.1). Zvolíme $J = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Množina W^J sestává z prvků ve tvaru $s_n s_{n-1} \cdots s_i$, pro i mezi 1 a n. Speciálně je tato množina řetězec vzhledem k uspořádání $\preccurlyeq$ (viz [23]).

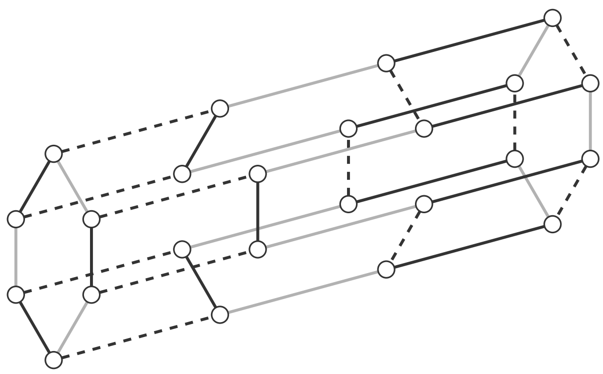
Tvrzení 2.23 *Buď W Coxeterova grupa typu A_n, pro $n \geqslant 2$. Označme J množinu generátorů $\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Pak je svaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektní součin $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, kde množina T_{s_i} speciálních trojic pro φ_{1,s_i}, s i mezi 1 a $n-1$, sestává z (viz obrázek 2.3):*
- trojic $((1,h),(s_i,h),s_i)$, pro $h \prec s_n s_{n-1} \cdots s_{i+1}$,
- trojic $((1,h),(s_i,h),s_{i+1})$, pro $s_n s_{n-1} \cdots s_i \preccurlyeq h$.



Obrázek 2.3: Zobrazení φ_{1,s_i} grupy typu A_n

Důkaz: Sestrojíme množinu T_{s_i} pro každé $i \leqslant n-1$, pomocí algoritmu 2.17. První trojice v T_{s_i} je trojice $((1,1),(s_i,1),s_i)$. Poté, s_i komutuje se všemi generátory s_j, kde j je mezi n a $i+2$, a tak nalezneme trojice $((1,s_n\cdots s_j),(s_i,s_n\cdots s_j),s_i)$. Poté platí vztah $s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1}$ a dostaneme $((1,s_n\cdots s_i),(s_i,s_n\cdots s_i),s_{i+1})$. Nakonec generátor s_{i+1} komutuje se všemi generátory s_j, s $j<i$ a nalezneme trojice $((1,s_n\cdots s_j),(1,s_n\cdots s_j),s_{i+1})$. Dorazili jsme prvku $s_n\cdots s_1$, největšímu prvku množiny W^J a tím se končí konstrukce množiny T_{s_i}. Věta 2.12 říká, že $(W,\preccurlyeq)$ je semidirektní součin. ■

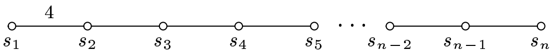
Svaz grupy W můžeme sestrojit indukcí. Svaz grupy typu A_1 je dvouprvkový svaz. Následně, pro každou grupu typu A_n s $n \geqslant 2$, parabolická podgrupa generovaná množinou $\{s_1,s_2,\ldots,s_{n-1}\}$ je grupa typu A_{n-1}. Takže je svaz grupy typu A_n semidirektním součinem svazu grupy typu A_{n-1} a řetězce o $n+1$ prvcích. Příklad pro $n=4$, se nalézá na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Cayleyův graf Coxeterovy grupy typu A_3: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2 a přerušované vyznačují s_3

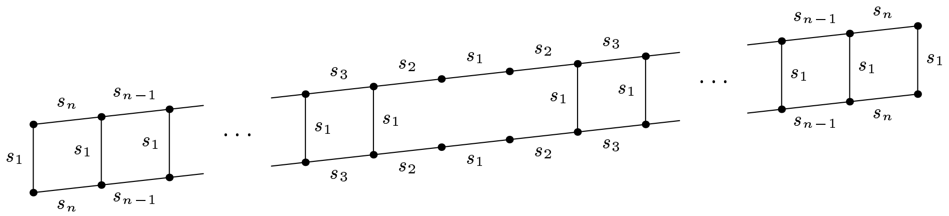
2.3.4 Typ $\mathsf{B_n}$

Coxeterův graf typu B_n, pro $n \geqslant 2$, je následující:



Příslušná grupa je grupa znaménkových permutací na $\{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$. *Znaménková permutace* je permutace π, která splňuje $\pi(-i) = -\pi(i)$ pro každé i ve svém definičním oboru (viz [27]). Pro rozklad zvolíme $J = \{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Označíme b_i prvek $s_n s_{n-1} \cdots s_i$, pro i mezi 1 a n, a c_i prvek $s_2 s_3 \cdots s_i$, pro i mezi 2 a n. Množina W^J je rovna $\{1\} \cup \{b_i;\ 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_1 c_i;\ 2 \leqslant i \leqslant n\}$, speciálně se jedná o řetězec (viz [23]).

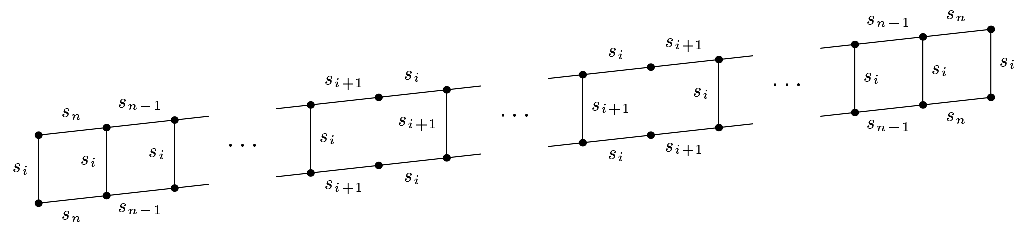
Tvrzení 2.24 *Buď W Coxeterova grupa typu B_n a označme J množinu $\{s_1, \dots, s_{n-1}\}$. Pak je svaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektním součinem $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, kde je zobrazení φ popsáno následovně:*
Množina T_{s_1} sestává z (viz obrázek 2.5):
- trojic $((1, h), (s_1, h), s_1)$, pro $h \prec b_2$,
- trojic $((1, h), (s_1, h), s_1)$, pro $b_2 c_2 \preccurlyeq h$.
Množina T_{s_i} s i mezi 2 a $n-1$ sestává z (viz obrázek 2.6):
- trojic $((1, h), (s_i, h), s_i)$, pro $h \prec b_{i+1}$,
- trojic $((1, h), (s_i, h), s_{i+1})$, pro $b_i \preccurlyeq h \prec b_2 c_i$,
- trojic $((1, h), (s_1, h), s_1)$, pro $b_2 c_{i+1} \preccurlyeq h$.



Obrázek 2.5: Zobrazení φ_{1,s_1} grupy typu B_n

Důkaz: Sestrojíme množiny T_{s_i} pomocí algoritmu 2.17. Začneme prvkem s_1, tzn. s $i = 1$: tento prvek komutuje se všemi generátory s_j, pro j mezi 3 a n, a tak $((1, b_j), (s_1, b_j), s_1)$ náleží do T_{s_1}. Poté platí $m_{s_1,s_2} = 4$, a nalezneme trojici $((1, b_1 s_2), (s_1, b_1 s_2), s_1)$. Nyní prvek s_1 komutuje opět se všemi generátory s_j, pro j mezi 3 a n, a $((1, b_1 c_j), (s_1, b_1 c_j), s_1)$ náleží do T_{s_1}.

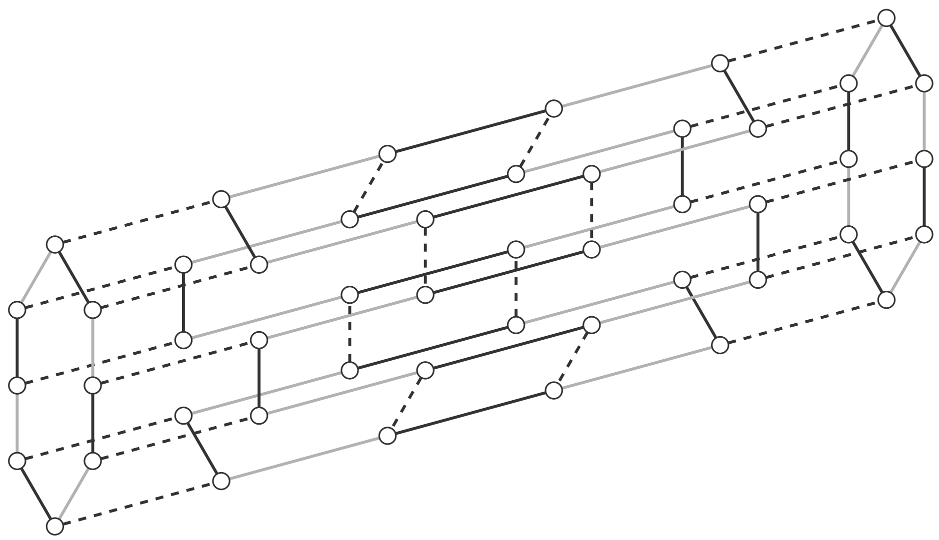
Mějme nyní prvek s_i, s $i > 1$. Tento prvek komutuje se všemi prvky s_j, kde j je mezi $i+2$ a n. Takže trojice $((1, b_j), (s_i, b_j), s_i)$ náleží do T_{s_i}. Nyní máme $m_{s_i,s_{i+1}} = 3$ a nalezneme trojici $((1, b_i), (s_i, b_i), s_{i+1})$. Prvek s_{i+1} komutuje se všemi s_j, pro $j < i$, a tak všechny trojice $((1, b_j), (s_i, b_j), s_{i+1})$ a $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_{i+1})$ náleží do T_{s_1}. Nyní



Obrázek 2.6: Zobrazení φ_{1,s_i}, pro $i \geqslant 2$, grupy typu B_n

máme opět $m_{s_i,s_{i+1}} = 3$ a nalezneme trojici $((1, b_1c_{i+1}), (s_i, b_1c_{i+1}), s_i)$. Nakonec prvek s_i komutuje se všemi s_j, pro $j > i + 1$ a nalezneme trojice $((1, b_1c_j), (s_i, b_1c_j), s_i)$. ■

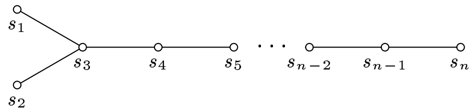
Svaz slabého uspořádání na B_n je semidirektní součin svazu grupy typu B_{n-1} a řetězce o $2n$ prvcích. Cayleyův graf pro B_n může být sestrojen následovně: vezmeme Cayleyův graf grupy typu B_{n-1} a nahradíme každou hranu příslušným grafem z obrázků 2.5 a 2.6. Jako příklad uvádíme na obrázku 2.7 Cayleyův graf grupy typu B_3.



Obrázek 2.7: Cayleyův graf grupy typu B_3: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2 a přerušované vyznačují s_3

2.3.5 Typ D_n

Coxeterův graf typu D_n, pro $n \geqslant 3$ je následující:

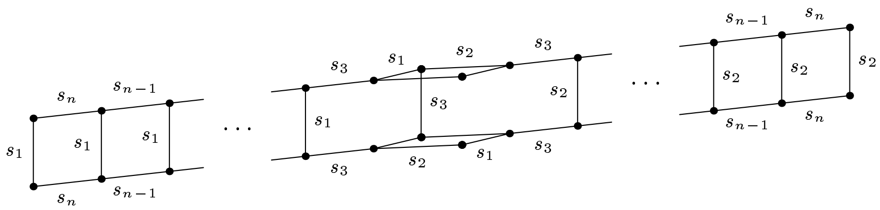


Příslušná grupa je podgrupa grupy typu B_n. Tato podgrupa grupou znaménkových permutací π na $\{-n, \ldots, -1, 1, \ldots, n\}$ které splňují $\pi(i) \neq -i$, pro každé i mezi $-n$ a n (viz [27]). Obvykle se nedefinuje grupa typu D_3, protože graf typu D_3 je roven grafu typu A_3. Přesto zde D_3 uvažujeme, a to proto, že to více vyhovuje našemu induktivnímu přístupu. Pro konstrukci semidirektního součinu zvolíme $J = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Označíme b_i prvek $s_n s_{n-1} \cdots s_i$ a c_i prvek $s_3 s_4 \cdots s_i$. Množina W^J je rovna

$$\{1\} \cup \{b_i;\, 3 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{b_3 s_j;\, j = 1, 2\} \cup \{b_1\} \cup \{b_1 c_i;\, 3 \leqslant i \leqslant n\}$$

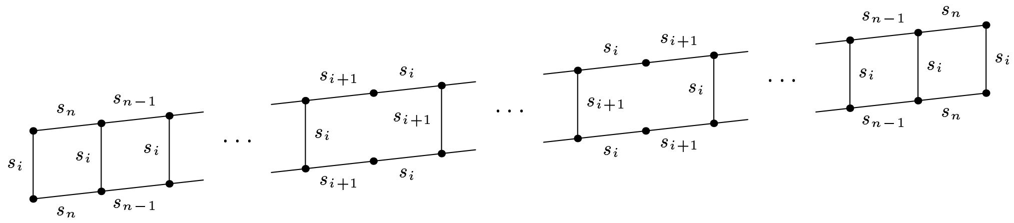
(viz [23]). Tato množina není řetězec, ale je mu blízko, a tak se semidirektní součin snadno na popíše.

Tvrzení 2.25 *Buď W Coxeterova grupa typu D_n a označme J množinu $\{s_1, \ldots, s_{n-1}\}$. Pak je svaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektním součinem $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, kde je zobrazení φ popsáno následně:*
Množina T_{s_i}, pro $i = 1, 2$ sestává z (viz obrázek 2.8):
- trojic $((1,h), (s_i,h), s_i)$, pro $h \prec b_3$,
- trojice $((1, b_3 s_i), (s_i, b_3 s_i), s_3)$,
- trojic $((1,h), (s_i,h), s_{3-i})$, pro $b_1 s_3 \preccurlyeq h$.
Množina T_{s_i} s i mezi 3 a $n-1$ sestává z (viz obrázek 2.9):
- trojic $((1,h), (s_i,h), s_i)$, pro $h \prec b_{i+1}$,
- trojic $((1,h), (s_i,h), s_{i+1})$, pro $b_i \preccurlyeq h \prec b_1 c_i$,
- trojic $((1,h), (s_1,h), s_1)$, pro $b_1 c_{i+1} \preccurlyeq h$.



Obrázek 2.8: Zobrazení φ_{1,s_1} pro grupu typu D_n

DŮKAZ: Použijeme algoritmus 2.17 k nalezení množin T_{s_i}: Začneme s $i = 1, 2$: generátor s_i komutuje se všemi generátory s_j, s $j \geqslant 4$. Takže trojice $((1, b_j), (s_i, b_j), s_i)$ náleží do T_{s_i}. Poté je m_{s_3, s_i} rovno 3 a nalezneme trojice $((1, b_3 s_i), (s_i, b_3 s_i), s_3)$. Nyní máme $m_{s_3, s_{3-i}} = 3$



Obrázek 2.9: Zobrazení φ_{1,s_i}, s $i \geqslant 3$, pro grupu typu D_n

a nalezneme trojici $((1, b_3 s_i s_{3-i} s_3), (s_i, b_3 s_i s_{3-i} s_3), s_{3-i})$. A poté generátor s_{3-i} komutuje se všemi s_j, pro $j \geqslant 4$ a trojice $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_{3-j})$ náleží do T_{s_i}.

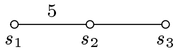
Uvažujme nyní generátor s_i, s $i \geqslant 3$. Tento prvek komutuje s s_j, pro $j > i+1$, a tak trojice $((1, b_j), (s_i, b_j), s_i)$ náleží do T_{s_i}. Poté máme $m_{s_i, s_{i+1}} = 3$ a nalezneme trojici $((1, b_i), (s_i, b_i), s_{i+1})$. Poté generátor s_{i+1} komutuje se všemi s_j, pro $j < i$ a nalezneme trojice $((1, b_j), (s_i, b_j), s_{i+1})$, s $i > j \geqslant 3$, trojice $((1, b_3 s_j), (s_i, b_3 s_j), s_{i+1})$, s $j = 1, 2$, také $((1, b_1), (s_i, b_1), s_{i+1})$ a trojice $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_{i+1})$, s $3 \leqslant j < i$. Poté máme $m_{s_{i+1}, s_i} = 3$ a nalezneme trojici $((1, b_1 c_{i+1}), (s_i, b_1 c_{i+1}), s_i)$. Nakonec generátor s_i komutuje se všemi s_j, pro $j > i+1$ a trojice $((1, b_1 c_j), (s_i, b_1 c_j), s_i)$ náleží do T_{s_i}. ■

Cayleyův graf Coxeterovy grupy typu D_n se může sestrojit indukcí z grupy typu D_{n-1} a příslušné levé rozkladové třídy. Indukci můžeme začít přímou konstrukcí představenou na obrázku 2.10, kde je podgrupa generovaná s_1 a s_2 Kleinovou grupou.

2.3.6 Výjimečné typy

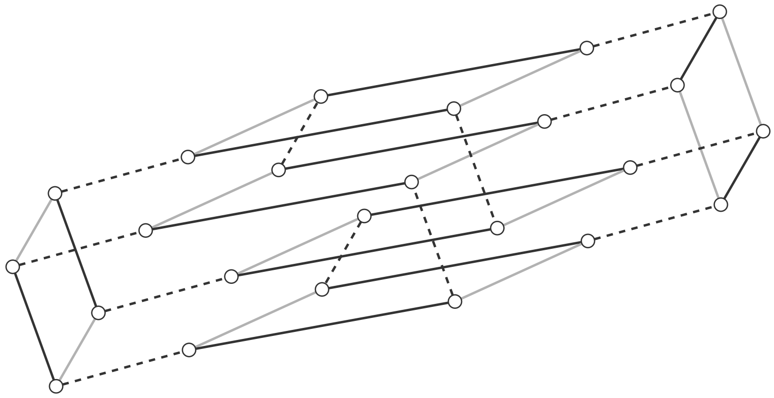
Existuje šest dalších typů ireducibilních Coxeterových grup, a to E_6, E_7, E_8, F_4, H_3 a H_4 (viz [27]). Induktivní konstrukce je také možná, ale je těžké popsat levé rozkladové třídy nějak jednoduše, kromě případu grupy typu H_3.

Uvažujme Coxeterův graf typu H_3:



Zvolíme $J = \{s_1, s_2\}$. Množina W^J je množinou prvků menších než $s_3 s_2 s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_2 s_3$. Nejedná se o řetězec, ale stejně jako v případě D_n, je tomu blízko.

Tvrzení 2.26 *Buď W Coxeterova grupa typu H_3 a označme J množinu $\{s_1, s_2\}$. Pak je svaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektní součin $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, kde je zobrazení φ popsáno následovně:*



Obrázek 2.10: Cayleyův graf grupy typu D_3: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2 a přerušované vyznačují s_3

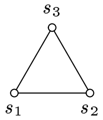
Množina T_{s_1} sestává z trojic $((1,1),(s_1,1),s_1)$, $((1,s_3),(s_1,s_3),s_1)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1),s_2)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1)$, $(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1),s_3)$ *a* $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),(s_1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),s_2)$.
Množina T_{s_2} sestává z trojic $((1,1),(s_2,1),s_2)$, $((1,s_3s_2),(s_2,s_3s_2),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1),(s_2,s_3s_2s_1),s_3)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_3),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_3),s_2)$, $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2),s_1)$ *a* $((1,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),(s_2,s_3s_2s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_2s_3),s_1)$.

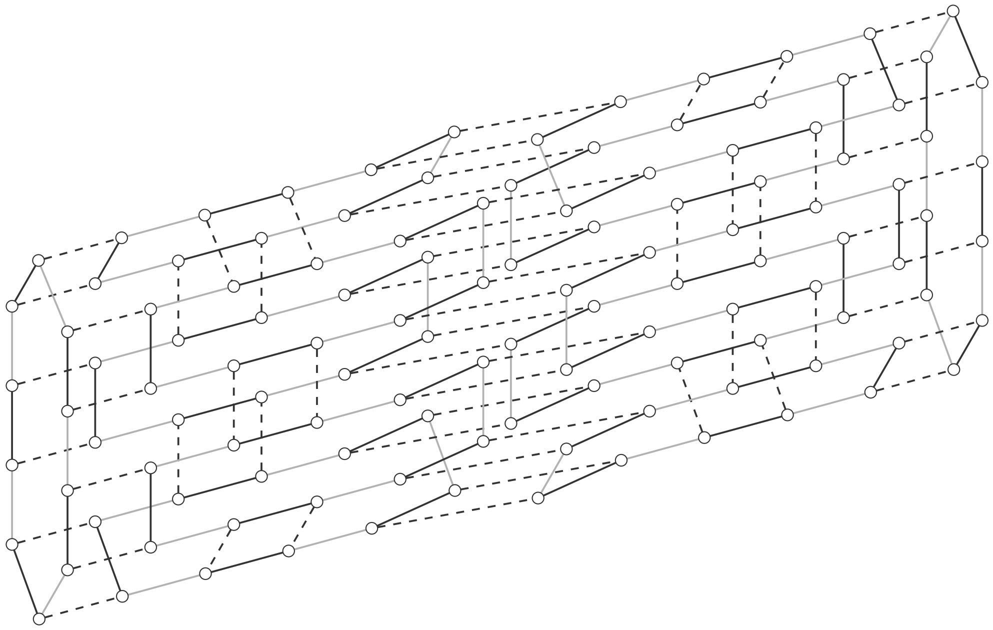
DŮKAZ: Důkaz je podobný tomu pro typ D_n.

Parabolická podgrupa W^J je grupa typu I_5. Cayleyův graf grupy W je představen na obrázku 2.11.

2.3.7 Nekonečné typy

Slabé uspořádání nekonečných Coxeterových grup tvoří také semidirektní součin. Ale zdá se, že existuje málo takových grup kde lze nalézt jednoduchý popis množiny W^J. Zde uvažujeme pouze typ $\tilde{A}_2$. Jeho Coxeterův graf je následující:





Obrázek 2.11: Caleyův graf grupy typu H_3: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2 a přerušované vyznačují s_3

Slabé uspořádání netvoří svaz, ale pouze polosvaz. Zvolíme $J = \{s_1, s_2\}$. Množina W^J je:

$$W^J = \{\underbrace{s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 \ldots}_{m};\ m \geqslant 1\} \cup \{\underbrace{s_3 s_1 s_2 s_3 s_1 s_2 \ldots}_{m};\ m \geqslant 1\} \cup \{g \in W;\ s_3 s_1 s_2 s_1 \preccurlyeq g\}$$

(viz [23]).

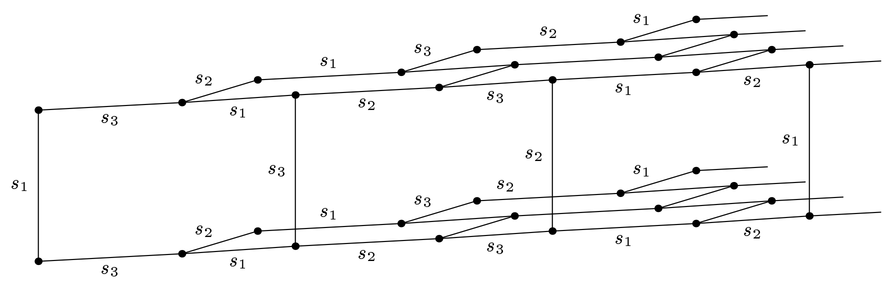
Tvrzení 2.27 *Buď W Coxeterova grupa typu $\tilde{A}_2$ a označme J množinu $\{s_1, s_2\}$. Pak je polosvaz $(W, \preccurlyeq)$ semidirektní součin $W_J \ltimes^{\varphi} W^J$, kde je zobrazení φ popsáno následovně: Množina T_{s_1} sestává z trojic (viz obrázek 2.12):*

$$((1, (s_3 s_1 s_2)^{2m}), (s_1, (s_3 s_1 s_2)^{2m}), s_1),$$
$$((1, (s_3 s_1 s_2)^{2m} s_3 s_1), (s_1, (s_3 s_1 s_2)^{2m} s_3 s_1), s_3),$$
$$((1, (s_3 s_1 s_2)^{2m+1} s_3), (s_1, (s_3 s_1 s_2)^{2m+1} s_3), s_2),$$

s $m \geqslant 0$. Množina T_{1,s_2} sestává z trojic

$$((1, (s_3 s_2 s_1)^{2m}), (s_2, (s_3 s_2 s_1)^{2m}), s_2),$$
$$((1, (s_3 s_2 s_1)^{2m} s_3 s_2), (s_2, (s_3 s_2 s_1)^{2m} s_3 s_2), s_3),$$
$$((1, (s_3 s_2 s_1)^{2m+1} s_3), (s_2, (s_3 s_2 s_1)^{2m+1} s_3), s_1).$$

s $m \geqslant 0$.



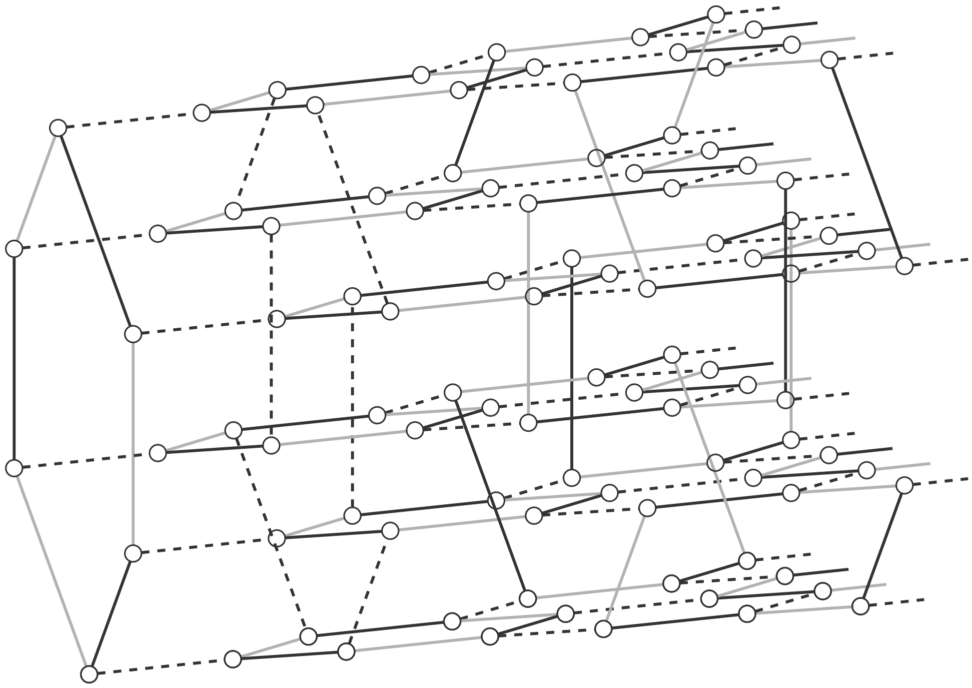
Obrázek 2.12: Zobrazení ψ_{1,s_1} grupy typu $\tilde{A}_2$. Zobrazení ψ_{1,s_2} je podobné – stačí prohodit hrany s_1 a s_2.

DŮKAZ: Systematicky spočítáme množinu T_{s_1} pomocí algoritmu 2.17. Použijeme indukci podle m. Poněvadž je s_1 generátor, prvek $(s_1, 1)$ je bezprostřední následník prvku $(1, 1)$. Nyní jediný generátor s v S takový, že $1s$ je J-redukovaný je prvek s_3. Máme $m_{s_1,s_3} = 3$ a, podle lemmatu 2.14, odvodíme, že $s_1s_3s_1$ je bezprostřední následník prvku s_3s_1. Neexistuje žádný jiný J-redukovaný prvek délky 1, a tak přejdeme k $((1, s_3s_1), (s_1, s_3s_1), s_3)$. Prvek $s_3s_1s_2$ je jediný následník prvku s_3s_1, který je J-redukovaný. Máme $m_{s_2,s_3} = 3$, a to implikuje, že máme trojici $((1, s_3s_1s_2s_3), (s_1, s_3s_1s_2s_3, s_2)$. Takže tvrzení platí pro $m = 0$.

Nyní předpokládejme, že trojice $((1, (s_3s_1s_2)^{2m-1}s_3), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m-1}s_3), s_2)$ náleží do T_{s_1}. Můžeme pokračovat pouze prvkem s_1. Máme $m_{s_2,s_1} = 3$ a nalezneme speciální trojici $((1, (s_3s_1s_2)^{2m}), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}), s_1)$. Stejný argument jako v případě $m = 0$ dokáže, že speciální trojice $((1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m}s_3s_1), s_3)$ náleží do T_{s_1} a také trojice $((1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), (s_1, (s_3s_1s_2)^{2m+1}s_3), s_2)$. Důkaz pro množinu T_{s_2} je stejný. ■

Podgrupa W_J je grupa typu A_2. Dle tvrzení 2.19, když nahradíme každou hranu grafu typu A_2 grafem z obrázku 2.12, dostaneme graf typu $\tilde{A}_2$, který je zobrazen na obrázku 2.13.

Příklad 2.28 Ukážeme, jak se může spočítat, pomocí zobrazení ψ, průsek dvou prvků Coxeterovy grupy W typu $\tilde{A}_2$. Mějme třeba $g = s_1s_2s_3s_1s_2s_1s_3s_1$ a $g' = s_2s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_1$. Určíme průsek g a g' v této grupě $\tilde{A}_2$ pomocí tvrzení 2.19. Algoritmem z [41], nalezneme $\alpha_J(g) = s_1s_2$ a $\alpha_J(g') = s_2$. Tyto prvky jsou neporovnatelné, a tak platí $\psi_{s_1s_2,s_2} = \psi_{s_1s_2,1}$ a $\psi_{s_2,s_1s_2} = \psi_{s_2,1}$. Nyní spočítáme $\psi_{s_1s_2,s_1}(s_3s_1s_2s_1s_3s_1)$ pomocí (2.6). Potřebujeme nalézt největší prvek h v W^J splňující $h \preccurlyeq s_3s_1s_2s_1s_3s_1$ a $((1, h), (s_2, h), t) \in T_{1,s_2}$, pro nějaké t v $\{s_1, s_2, s_3\}$. Takovýto prvek musí být tvaru $(s_3s_2)^a(s_1s_3)^b(s_2s_1)^c$, s $a \geqslant b \geqslant c \geqslant a - 1$, a největší takový, který je stále menší než $s_3s_1s_2s_1s_3s_1$, je prvek s_3s_2. Takže máme $\psi_{s_1s_2,s_1}(s_3s_1s_2s_1s_3s_1) = s_3s_2$. Analogicky dostaneme $\psi_{s_1,1}(s_3s_2) = 1$ a tak, pomocí (2.5),



Obrázek 2.13: Cayleyův graf grupy typu $\tilde{A}_2$: černé hrany vyznačují s_1, šedé vyznačují s_2 a přerušované vyznačují s_3

vyvodíme $\psi_{s_1s_2,1}(s_3s_1s_2s_1s_3s_1) = 1$. Stejně dostaneme $\psi_{s_2,1}(s_3s_2s_1s_3s_2s_3s_1) = s_3s_2s_1s_3$. Nakonec definice zobrazení ψ dává

$$g \wedge g' = (s_1s_2 \wedge s_2)(1 \wedge s_3s_2s_1s_3) = 1.$$

Kapitola 3

Svazy dělitelnosti

Artinovské monoidy sférického typu jsou extenzemi konečných Coxeterových grup. Slabé uspořádání na Coxeterových grupách odpovídá, v Artinovském monoidu, uspořádání levou dělitelností. V sekci 1 studujeme kongruence svazu levé dělitelnosti Artinovských monoidů sférického typu a dokážeme, že jejich svazy jsou jednoduché.

Garsidovy monoidy jsou zobecněním pojmu Artinovských monoidů sférického typu. Každý Garsidův monoid obsahuje důležitý prvek zvaný nejmenší Garsidův prvek. Charakteristický graf Garsidova monoidu je svaz dělitelů nejmenšího Garsidova prvku. V sekci 2 studujeme, charakteristické grafy Garsidových monoidů z pohledu semidirektních součinů svazů.

3.1 Svazy dělitelnosti v Artinovských monoidech

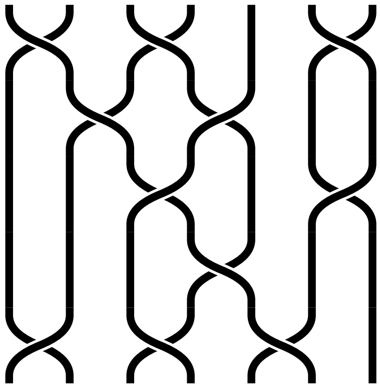
V této sekci studujeme svazy dělitelnosti v Artinovských monoidech. Zkoumáme nejdřív ideály generované jistými kanonickými prvky a pak dokážeme, že svazy dělitelnosti v Artinovských monoidech jsou jednoduché. Začněme definicí Artinovského monoidu.

Definice: Buď $\Gamma = (\Sigma, A)$ Coxeterův graf. *Artinovská grupa* příslušející grafu Γ je grupa s grupovou prezentací

$$\langle\, \Sigma;\ [\sigma,\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}} = [\tau,\sigma\rangle^{m_{\sigma,\tau}} \quad \text{pro } m_{\sigma,\tau} < \infty \,\rangle. \tag{3.1}$$

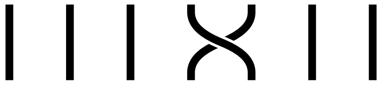
Artinovský monoid příslušející grafu Γ je monoid s monoidovou prezentací (3.1). Artinovská grupa nebo monoid je *sférického typu,* pokud příslušný Coxeterův graf definuje konečnou Coxeterovu grupu. Řekneme, že je Artinovská grupa nebo monoid *ireducibilní,* pokud je příslušný Coxeterův graf souvislý.

Mějme Coxeterův graf typu A_n (viz příklad 2.1). Příslušná Artinovská grupa se nazývá *pletencová grupa na* $n+1$ *provázcích.* Její geometrická interpretace je následující [12]. Začneme s $n+1$ souběžnými provázky. Prvky pletencové grupy jsou třídy izotopie diagramů jako na obrázku 3.1. Násobení odpovídá spojování motivů.



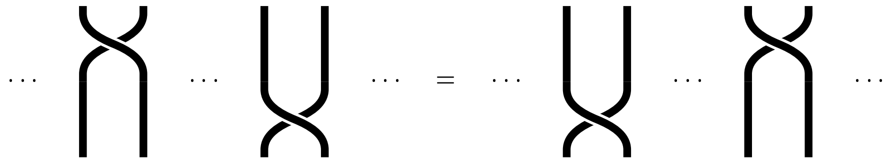
Obrázek 3.1: Pletenec $\sigma_1\sigma_3\sigma_6\sigma_2\sigma_4^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_6^{-1}\sigma_4\sigma_1^{-1}\sigma_3\sigma_5$

Křížení i-tého provázku nad $(i+1)$-ním provázkem se značí σ_i (viz obrázek 3.2) a křížení $(i+1)$-ního provázku nad i-tým provázkem se značí σ_i^{-1}. Tyto motivy jsou navzájem inverzní modulo izotopie.



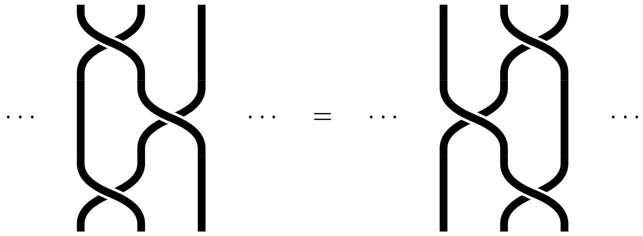
Obrázek 3.2: Pletenec σ_4.

Existují kanonické relace, a to $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$, pro $|i-j| \geqslant 2$, (viz obrázek 3.3) a $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ (viz obrázek 3.4).



Obrázek 3.3: Relace $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ pro $|i-j| \geqslant 2$

Víme (viz [12]), že tyto relace definují pletencovou grupu, a tedy, že tato grupa je



Obrázek 3.4: Relace $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Artinovskou grupou typu A_n. Monoid pozitivních pletenců je monoid těch pletenců, ve kterých se neobjeví žádné křížení $i+1$-ního provázku přes i-tý provázek. Tento monoid je Artinovský monoid typu A_n.

Když faktorizujeme Artinovskou grupu či monoid přes relace $\sigma^2 = 1$, pro σ v Σ, dostaneme příslušnou Coxeterovu grupu. Artinovská grupa je tedy beztorzní extenzí příslušné Coxeterovy grupy [11].

Definice: Nechť je M monoid. Řekneme, že je prvek a monoidu M *atom,* jestliže relace $a = bc$, pro b, c v M, implikuje $b = 1$ nebo $c = 1$ Řekneme, že monoid M je *atomární,* pokud supremum $\|a\|$ délek rozkladů prvku a jako součinu atomů je konečné pro každé a v M. Toto číslo $\|a\|$ nazýváme *norma* prvku a.

V případě Artinovského monoidu generátory σ z Σ jsou atomy a délka rozkladů prvku jako součinu atomů je konstantní, protože relace prezentace (3.1) zachovávají délku. Takže každý Artinovský monoid je atomární a norma prvku je délka jakéhokoliv rozkladu.

Definice: Buď M atomární monoid a buďte a, b, c v M splňující $a = bc$. Pak řekneme, že b je *levý dělitel* prvku a, značeno $b \preccurlyeq a$, že c je *pravý dělitel* prvku a, že a je *pravý násobek* prvku b a že a je *levý násobek* prvku c.
Řekneme, že c je *nejmenší společný pravý násobek* prvků a a b, značeno $c = a \vee b$, jestliže je c pravým násobkem prvků a a b a každý jejich jiný společný pravý násobek je pravým násobkem prvku c.
Řekneme, že prvek c je *největší společný levý dělitel* prvků a a b, značeno $c = a \wedge b$, pokud je c levým násobkem prvků a a b a každý jejich jiný společný levý dělitel je levým dělitelem prvku c.

Tvrzení 3.2 [5] *Každý Artinovský monoid sférického typu M je atomární, s oboustranným krácením a každá dvojice prvků z M má největšího společného levého dělitele a nejmenší společný pravý násobek.*

Tvrzení 3.2 ukazuje, že množina M s uspořádáním $\preccurlyeq$ je svaz, poněvadž každá dvojice a, b v M má supremum $a \vee b$ a infimum $a \wedge b$. Definujeme operaci $\backslash$ *levého rezidua* jako

$$a \vee b = a(a\backslash b) = b(b\backslash a) \tag{3.2}$$

Definice: Buď M atomární monoid. Řekneme, že prvek δ monoidu M je *vyvážený,* jestliže je množina levých dělitelů prvku δ shodná s množinou pravých dělitelů δ. Tato množina se značí $M(\delta)$.
Prvek δ z M se nazývá *Garsidův prvek,* jestliže je vyvážený a $M(\delta)$ generuje M.
Garsidův prvek se nazývá *nejmenší Garsidův prvek* monoidu M, pokud je nejmenší v uspořádání levou dělitelností mezi všemi Garsidovými prvky monoidu M. Každý levý dělitel nejmenší Garsidova prvku Δ se nazývá *jednoduchý* prvek.

Tvrzení 3.3 [**17**] *Buď M atomární monoid. Pokud M má aspoň jeden Garsidův prvek, pak má nejmenší Garsidův prvek.*

Buď M Artinovský monoid sférického typu a označme W příslušnou Coxeterovu grupu. Označme p projekci M na W. Snadno dokážeme nerovnost $\|a\| \geqslant \ell(p(a))$, pro každé a v M. Podle [5] máme rovnost $\|a\| = \ell(p(a))$ tehdy a jen tehdy, je-li a jednoduchý. Zobrazení p je bijekce mezi množinou jednoduchých prvků v M a množinou W. Navíc je snadné nahlédnout, že je tato bijekce slučitelná s uspořádáními, čímž myslíme uspořádání jednoduchých prvků levou dělitelností na M a slabé uspořádání na W. Takže nejmenší Garsidův prvek Δ monoidu M je charakterizován vlastnostmi $p(\Delta) = w_0$ a $\|\Delta\| = \ell(w_0)$. Jiná charakterizace prvku Δ je ukázána v následujícím lemmatu:

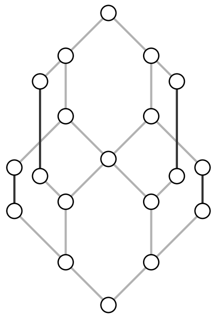
Lemma 3.4 [**5**] *Buď M Artinovský monoid sférického typu a buď Δ nejmenší Garsidův prvek monoidu M. Pak pro každé k v $\mathbb{N}$ je prvek Δ^k je nejmenším společným levým násobkem prvků s normou k.*

Budeme se nejdříve zabývat hlavními ideály svazů dělitelnosti, které jsou generovány Garsidovými prvky, tj. svazy $(M(\delta), \preccurlyeq)$, kde je δ Garsidův prvek Artinovského monoidu sférického typu. Podle [22], každý Garsidův prvek v M je mocninou nejmenšího Garsidova prvku Δ v M. Začneme tedy svazy dělitelů samotného prvku Δ.

Tvrzení 3.5 *Buď M Artinovský monoid sférického typu buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď X podmnožina atomů v M a buď δ nejmenší společný pravý násobek množiny X. Pak je svaz $(M(\Delta), \preccurlyeq)$ semidirektním součinem svazu $(M(\delta), \preccurlyeq)$ a svazu $(\{d;\, d \wedge \delta = 1\}, \preccurlyeq)$.*

DŮKAZ: Už jsme si řekli, že svaz dělitelů prvku Δ je izomorfní svazu slabého uspořádání příslušné Coxeterovy grupy. Tvrzení tedy vyplývá z věty 2.12. ∎

Začneme teď uvažovat svazy $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$ pro $k > 1$. Příklad vidíme na obrázku 3.5. Pro studium těchto svazů potřebujeme jeden obecný svazový výsledek.



Obrázek 3.5: Svaz $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$ v Artinovském monoidu typu A_2. Vrcholy spojené černými hranami vyznačují největší netriviální kongruenci (viz níže) na svazu $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$.

Definice [25]: Buď L svaz a buďte a, b, c, d v L splňující $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$. Píšeme $[a, b] \nearrow [c, d]$ nebo $[c, d] \searrow [a, b]$, pokud platí $b \vee c = d$ a $b \wedge c = a$. Označíme $\approx$ nejmenší ekvivalenci intervalů svazu L, která obsahuje relace $\nearrow$ a $\searrow$.

V teorii svazů se obvykle používá notace b/a pro označení intervalu $[a, b]$. Této notaci se zde vyhneme, protože je shodná se značením pravého rezidua (analogie levého rezidua).

Lemma 3.6 [23] *Buď L svaz a buď θ kongruence na L. Buďte a, b dva prvky splňující $(a, b) \in \theta$.*
(i) Každý prvek svazu L mezi prvky $a \wedge b$ a $a \vee b$ je kongruentní prvku a.
(ii) Pokud platí $a \leqslant b$, pak pro každý interval $[c, d]$ s $[a, b] \approx [c, d]$ platí $(c, d) \in \theta$.

V případě svazů $(M(\Delta), \preccurlyeq)$, existuje kongruence příslušející každé podmnožině mno«iny atomů X, a to kanonická kongruence semidirektního součinu. V této kongruenci je každý atom z X kongruentní prvku 1. Naproti tomu, v případě svazů $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$, s $k > 1$ a M ireducibilního, pouze triviální kongruence může slepit atom z M s prvkem 1 do jedné třídy ekvivalence:

Lemma 3.7 *Buď M ireducibilní Artinovský monoid sférického se dvěma atomy σ_1, σ_2. Buď Δ prvek $[\sigma_1, \sigma_2\rangle^{m_{\sigma_1,\sigma_2}}$. Buď θ kongruence na $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$. Pokud je některý z atomů θ-kongruentní prvku 1, pak je θ triviální.*

DŮKAZ: Předpokládejme $(\sigma_1, 1) \in \theta$. Platí $[1, \sigma_1] \nearrow [\sigma_2, \Delta] \searrow [1, \sigma_1\sigma_2]$, protože monoid není komutativní. Pak platí $(\Delta, \sigma_2) \in \theta$ a $(\sigma_1\sigma_2, 1) \in \theta$. Nyní máme $[\sigma_1, \sigma_1\sigma_2] \nearrow$

$[\sigma_1^2, \sigma_1\Delta] \searrow [\sigma_1, \Delta]$. Takže platí $(\Delta, \sigma_1) \in \theta$ a také $(\sigma_1, \sigma_2) \in \theta$. Nyní nalezneme $[\sigma_1\sigma_2, \Delta] \nearrow [\sigma_1\sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2\Delta] \searrow [\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\Delta]$ a $(\sigma_1\Delta, \Delta) \in \theta$. Stejně tak nalezneme $(\sigma_2\Delta, \Delta) \in \theta$. Poněvadž nejmenší společný pravý násobek prvků $\sigma_1\Delta$ a $\sigma_2\Delta$ je Δ^2, platí $(\Delta^2, \Delta) \in \theta$. Viděli jsme též $(\Delta, 1) \in \theta$ a podle lemmatu 3.6 (i) celý svaz L náleží do jedné třídy kongruence.

■

Následující tvrzení dodá přísnější podmínky pro existenci netriviální kongruence θ. Podmínka (3.3) vyžaduje, aby dva ekvivalentní prvky měly stejné dělitele až do normy k a podmínka (3.4) je podmínkou duální.

Tvrzení 3.8 *Buď M ireducibilní Artinovský monoid sférického typu, který má alespoň dva atomy. Označme Δ jeho nejmenší Garsidův prvek a označme L svaz levé dělitelnosti dělitelů prvku Δ^k, pro $k > 1$. Buď θ netriviální kongruence na L. Pokud jsou dva prvky a, b z L θ-ekvivalentní, pak jsou splněny následující dvě podmínky:*

$$\{c \in L;\ c \preccurlyeq a \text{ a } \|c\| \leqslant k\} = \{c \in L;\ c \preccurlyeq b \text{ a } \|c\| \leqslant k\}, \tag{3.3}$$

$$\{c \in L;\ a \preccurlyeq c \text{ a } \|c\backslash\Delta^k\| \leqslant k\} = \{c \in L;\ b \preccurlyeq c \text{ a } \|c\backslash\Delta^k\| \leqslant k\}. \tag{3.4}$$

Důkaz: Buď θ netriviální kongruence a buďte a, b dva prvky svazu L, které jsou θ-ekvivalentní. Předpokládejme $a \leqslant b$ bez újmy na obecnosti. Zkoumáme nejdříve případ $a = 1$. Existuje atom σ z M splňující $\sigma \preccurlyeq a$. Poněvadž je monoid M ireducibilní a má alespoň dva atomy, existuje atom τ v M, který nekomutuje se σ. Nyní podle lemmatu 3.7 máme $(\tau, 1) \in \theta$. Pokračujeme indukcí: předpokládejme, že všechny atomy podmnožiny Σ' množiny Σ jsou kongruentní prvku 1. Pokud množina $\Sigma \smallsetminus \Sigma'$ není prázdná, pak díky ireducibilitě existuje dvojice atomu σ' ze Σ' a τ' ze $\Sigma \smallsetminus \Sigma'$, která nekomutuje. Podle lemmatu 3.7 platí $(\tau', 1) \in \theta$. Na konci indukce dostaneme, že každý atom ze Σ je kongruentní prvku 1. Jelikož je prvek Δ největším společným pravým násobkem atomů, dostaneme také $(\Delta, 1) \in \theta$.

Nyní dokážeme indukcí, že Δ^l je kongruentní prvku 1, pro každé $l \leqslant k$. To je pravda pro $l = 1$. Předpokládejme $l > 1$. Pro každou dvojici atomů σ', σ'', které nekomutují, platí $[\Delta^{l-2}\sigma'\sigma'', \Delta^{l-1}] \nearrow [\Delta^{l-2}\sigma'(\sigma'')^2, \Delta^{l-2}\sigma'\sigma''\Delta] \searrow [\Delta^{l-1}\sigma'\sigma'', \sigma'\Delta^{l-1}]$, a to implikuje $(\sigma'\Delta^{l-1}, 1) \in \theta$. Poněvadž nejmenší společný pravý násobek prvků $\sigma'\Delta^{l-1}$, pro všechna σ' v Σ je prvek Δ^l, platí $(\Delta^l, 1) \in \theta$. Výsledek tedy platí i pro $l = k$ a kongruence θ je triviální, což je spor s předpokladem tvrzení.

Předpokládejme teď $1 \leqslant \|a\| < k$. Existuje atom σ splňující $(a, a\sigma) \in \theta$. Existuje také atom τ splňující $a = a'\tau$. Poněvadž je norma prvku a ostře menší než k, prvek $a\Delta$ je levý dělitel prvku Δ^k. Nyní platí $[a, a\sigma] \nearrow [a\tau, a[\sigma\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}}] \searrow [a, a[\sigma\tau\rangle^{m_{\sigma,\tau}-1}] \searrow [a', a'\sigma]$. Máme tedy $(a', a'\sigma) \in \theta$. Nalezli jsme dvojici θ-ekvivalentních prvků s $\|a'\| < \|a\|$. Pokračujeme a nalézáme indukcí čím dál menší prvky až do okamžiku, kdy dostaneme dvojici $(1, e) \in \theta$. Ale to dává $\theta = L \times L$ a to je spor, protože θ má být netriviální.

Mějme nyní dva prvky a, b, které nesplňují podmínku (3.3). Buď c dělitel b splňující $\|c\| \leqslant k$, který nedělí a. Pak platí $a \preccurlyeq a \vee c \preccurlyeq a \vee b$ a $(a, a \vee c) \in \theta$. Pak nalezneme $[a, a \vee c] \searrow [a \wedge c, c]$ a $(a \wedge c, c) \in \theta$. Nutně platí $\|a \wedge c\| < k$ a podle předchozího odstavce máme $\theta = L \times L$, což je spor s předpoklady věty. Takže každá dvojice θ-ekvivalentních prvků musí splňovat podmínku (3.3). Zobrazení $a \mapsto a\backslash\Delta$ je antiautomorfismus svazu L, a tak podmínka (3.4) plyne z duality a z podmínky (3.3). ■

Důsledek 3.9 *Buď M Artinovský monoid sférického typu, buď Δ jeho minimální Garsidův prvek a buď $k > 1$. Pak má svaz $(M(\Delta^k), \preccurlyeq)$ maximální kongruenci.*

DŮKAZ: Dvě netriviální kongruence musejí splňovat podmínky (3.4) a (3.3). Jejich spojení musí také splňovat tyto podmínky. ■

Podmínky (3.3) a (3.4) nejsou obecně postačující. Buď ρ relace taková, že (a, b) jsou v ρ právě tehdy, když a a b splňují (3.3) a (3.4). V případě zobrazeném na obrázku 3.5 je relace ρ kongruencí, a tak je i maximální kongruencí. Ať je ale M Artinovský monoid typu I_6. Uvažujme svaz $(M(\Delta^2), \preccurlyeq)$. Prvky $a = \sigma_1\sigma_2^2$ a $b = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2$ splňují podmínky (3.3) a (3.4). Ale platí $\sigma_1\sigma_2^2 \wedge \sigma_1\sigma_2\sigma_1^2 = \sigma_1\sigma_2$ a tento prvek je, narozdíl od a a b, levý dělitel prvku $\sigma_1\backslash\Delta^2$, což dokazuje, že ρ není kongruencí na M.

Otázka 3.10 Jaké jsou postačující podmínky, aby dvojice prvků náležela do maximální kongruence na svazu $(M(\delta^k), \preccurlyeq)$?

Platí další tvrzení, které je důsledkem tvrzení 3.8, jednoduchost celého svazu $(M, \preccurlyeq)$.

Tvrzení 3.11 *Buď M ireducibilní Artinovský monoid sférického typu, který má alespoň dva atomy. Pak je svaz $(M, \preccurlyeq)$ jednoduchý.*

DŮKAZ: Buď θ kongruence na M a buďte a, b různé v M a θ-kongruentní. Buď k číslo splňující $k > \max\{\|a\|, \|b\|\}$. Pak dle tvrzení 3.8 je kongruence θ zúžená na M_{Δ^k} triviální a platí $(\Delta^k, 1) \in \theta$. Toto je pravda pro jakékoliv dostatečně velké k, a tak je kongruence θ triviální. ■

3.2 Semidirektní součiny v Garsidových monoidech

Garsidovy monoidy jsou zobecněním Artinovských monoidů sférického typu. Každý Garsidův monoid M obsahuje Garsidův prvek Δ. V této sekci studujeme svazy dělitelů prvku Δ v M Najdeme podmínky, za kterých tyto svazy umožňují konstrukci semidirektním součinem.

Definice [17]: Monoid M se nazývá *Garsidův monoid,* jestliže splňuje čtyři následující podmínky:
(i) Monoid M je atomární s konečným počtem atomů.
(ii) Monoid M je s oboustranným krácením.

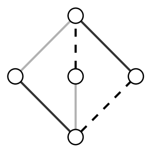
(iii) Každá dvojice prvků z M má pravý NSN a levého NSD.
(iv) Existuje Garsidův prvek v M.

Je známo (viz [17]), že uspořádání levou dělitelností v Garsidově monoidu tvoří svaz.

Definice: Buď Δ nejmenší Garsidův prvek Garsidova monoidu M. *Charakteristický graf* monoidu M je podgraf Cayleyova grafu monoidu M zúžený na jednoduché prvky.

Příklad 3.12 Každý Artinovský monoid sférického typu je Garsidův monoid. Jeho charakteristický graf je roven Cayleyovu grafu příslušné Coxeterovy grupy.

Charakteristický graf je důležitý, protože určuje jednoznačně a« na izomorfismus Garsidův monoid (viz [14]). V případě Artinovských monoidů sférického typu se charakteristické grafy dostanou rekurzivní konstrukcí pomocí semidirektního součinu svazů. Budeme zde zkoumat charakteristické grafy, umožňují najít rozklad ve formě semidirektního součinu. Není pravdou, že by každý charakteristický graf umožňoval takovýto rozklad: například graf na obrázku 3.6 je jednoduchý, a tak nemůže být rozložen.



Obrázek 3.6: Charakteristický graf monoidu B_3^{BKL+} Birmana, Ko a Lee [2], s prezentací $\langle a, b, c;\ ab = bc = ca\rangle$. Nejmenší Garsidův prvek je prvek ab. Černé hrany vyznačují a, šedé vyznačují b a přerušované vyznačují c.

Stejně jako v případě Coxeterových grup zde definujeme pojem parabolické podstruktury.

Definice [24]: Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď δ jednoduchý vyvážený prvek z M. Označme M_δ monoid generovaný množinou dělitelů prvku δ, značenou $M(\delta)$. Pokud platí $M(\delta) = M(\Delta) \cap M_\delta$, pak se monoid M_δ nazývá *parabolický podmonoid* monoidu M.

Tvrzení 3.13 [24] *Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď δ jednoduchý vyvážený prvek z M. Je-li M_δ parabolický podmonoid monoidu M, pak je M_δ Garsidův monoid a δ je jeho Garsidův prvek.*

Definujeme také množinu δ-redukovaných prvků a dokážeme, že každý jednoduchý prvek má jednoznačný rozklad ve formě součinu dělitele prvku δ a prvku δ-redukovaného.

Definice: Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Řekneme, že prvek a z $M(\Delta)$ je *δ-redukovaný,* pokud platí $a \wedge \delta = 1$. Množina všech δ-redukovaných prvků se značí M^δ. Označíme d_δ největší prvek M^δ, pokud takový prvek existuje.

Lemma 3.14 *Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Pak se každý prvek a z $M(\Delta)$ zapíše jednoznačně jako součin prvku z $M(\delta)$ a prvku z M^δ.*

DŮKAZ: Máme rozklad $a = (a \wedge \delta)((a \wedge \delta)\backslash a)$. Chceme dokázat, že se jedná o hledaný rozklad a že je jednoznačný. Buď b prvek $\delta \wedge ((a \wedge \delta)\backslash a)$. Prvek $(a \wedge \delta)b$ je prvkem M_δ, který je jednoduchý v M. Takže podle definice parabolického podmonoidu je levým dělitelem prvku δ. Tento prvek je také levým dělitelem prvku a, a tak platí $(a \wedge \delta)b \preccurlyeq a \wedge \delta$, což dává $b = 1$. Takže prvek $(a \wedge \delta)\backslash a$ je δ-redukovaný. Mějme nyní rozklad $a = a'a''$ s a' v $M(\delta)$ a a'' v M^δ. Poněvadž je a' levým dělitelem jak prvku a a, tak i prvku δ, platí $a' \preccurlyeq (a \wedge \delta)$. Označme c prvek $a'\backslash(a \wedge \delta)$. Prvek a'', který je roven $c(a \wedge \delta)\backslash a$, je δ-redukovaný, a tak platí $a'' \wedge \delta = 1$. Ale máme $c \preccurlyeq (c(a \wedge \delta)\backslash a) \wedge \delta$ a z toho plyne $c = 1$. Takže rozklad $a = (a \wedge \delta)((a \wedge \delta)\backslash a)$ je jediný. ∎

Definice: Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Definujeme zobrazení α_δ z $M(\Delta)$ do $M(\delta)$ a ω_δ z $M(\Delta)$ do M^δ jako $\alpha_\delta(a) = a \wedge \delta$ a $\omega_\delta(a) = (a \wedge \delta)\backslash a$ pro každé a z $M(\Delta)$.

Příklad 3.15 Buď M Artinovský monoid sférického typu, buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď X podmnožina množiny atomů monoidu M a δ levý NSN množiny X. Pak je M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Svaz dělitelnosti na množině $M(\Delta)$ odpovídá svazu slabého uspořádání na příslušné Coxeterově grupě. Rozklad $a = \alpha_\delta(a)\omega_\delta(a)$ odpovídá rozkladu $g = \alpha_J(g)\omega_J(g)$, kde g je obraz a a J je obraz množiny X v kanonické projekci.

Lemma 3.14 zavádí rozklad každého jednoduchého prvku. Ale tento rozklad není obecně bijekcí: nemůžeme obecně vědět, zda součin prvku z $M(\delta)$ a prvku z M^δ padne do množiny $M(\Delta)$. Například v monoidu představeném na obrázku 3.6 je podmonoid generovaný prvkem a parabolický. Prvek c je a-redukovaný, ale prvek ac není jednoduchý.

Představíme nyní postačující podmínku pro to, aby zobrazení α_δ a ω_δ dávala bijekci mezi $M(\Delta)$ a $M(\delta) \times M^\delta$. V tomto případě tento rozklad umožňuje použít semidirektní součin. Připomínáme, že d_δ je největší prvek množiny M^δ, pokud takový prvek existuje.

Tvrzení 3.16 *Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Pak je zobrazení $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ bijekcí z množiny $M(\Delta)$ na množinu $M(\delta) \times M^\delta$ právě tehdy, když prvek d_δ existuje a platí $\Delta = \delta d_\delta$. Navíc, pokud je tato podmínka splněna, pak je zobrazení α_δ epimorfismus ze svazu $M(\Delta)$ na svaz M_δ.*

Důkaz: Předpokládejme nejdřív, že $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ je bijekce. Pak je zobrazení ω_δ bijekcí mezi intervalem $[\delta, \Delta]$ a množinou M^δ. Navíc, zobrazení ω_δ zúžené na tento interval je slučitelné s uspořádáním: relace $\delta b \preccurlyeq \delta c$ je ekvivalentní relaci $b \preccurlyeq c$, díky levému krácení. Prvek Δ je největší prvek intervalu $[\delta, \Delta]$, a tak se zobrazuje na největší prvek množiny M^δ a máme $\Delta = \delta d_\delta$.

Předpokládejme nyní, že prvek d_δ existuje a že platí $\Delta = \delta d_\delta$. Pak každý prvek ve tvaru ad_δ s a v $M(\delta)$ je pravým dělitelem prvku Δ, a tak i levým dělitelem prvku Δ. Každý prvek ve tvaru ab s a v $M(\delta)$ a b v M^δ je levým dělitelem prvku ad_δ, a tak i levým dělitelem Garsidova prvku Δ. Takže zobrazení $a \mapsto (\alpha_\delta(a), \omega_\delta(a))$ je surjektivní. Injektivita tohoto zobrazení je dokázána v lemmatu 3.14.

Dokážeme teď, že je zobrazení α_δ epimorfismus svazů. Surjektivita je evidentní a slučitelnost s průsekem se dostane okamžitě: platí $\alpha_\delta(a \wedge b) = (a \wedge b \wedge \delta) = (a \wedge \delta) \wedge (b \wedge \delta) = \alpha_\delta(a) \wedge \alpha_\delta(b)$. Takže stačí dokázat slučitelnost se spojením.

Dokažme nejdříve $d_\delta \preccurlyeq bd_\delta$ pro každé b v $M(\delta)$. Ať je c prvek splňující $cb = \delta$. Prvek cd_δ je součinem prvku z $M(\delta)$ a prvku z M^δ, a tak to je levý dělitel prvku Δ. Platí $cd_\delta((cd_\delta)\backslash\Delta) = \Delta = cbd_\delta$ a můžeme zkrátit prvek c. Dostaneme $d_\delta((cd_\delta)\backslash\Delta) = bd_\delta$ a prvek d_δ je levým dělitelem prvku bd_δ.

Dokažme poté, že relace $b \preccurlyeq b'$ je ekvivalentní relaci $bd_\delta \preccurlyeq b'd_\delta$. Předpokládejme $b \preccurlyeq b'$. Buď b'' prvek splňující $bb'' = b'$. Dokázali jsme, že prvek d_δ je levý dělitel prvku $b''d_\delta$, a tak existuje prvek c splňující $b''d_\delta = d_\delta c$. Nyní platí $b'd_\delta = bb''d_\delta = bd_\delta c$, a tak je bd_δ levým dělitelem prvku $b'd_\delta$. Předpokládejme nyní $bd_\delta \preccurlyeq b'd_\delta$. Aplikujeme operaci průseku s δ na tuto nerovnost a dostaneme $b \preccurlyeq b'$.

Dokážeme nakonec, že α_δ je slučitelné se spojením. Po každé a, b v $M(\Delta)$ platí $a = \alpha_\delta(a)\omega_\delta(a) \preccurlyeq \alpha_\delta(a)d_\delta \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$. Stejně tak platí $b \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$, a to dává $a \vee b \preccurlyeq (\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b))d_X$. Aplikujeme operaci průseku s δ na tuto nerovnost a dostaneme $\alpha(a \vee b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b)$. Na druhou stranu vezměme idempotenční zákon $a \wedge (a \vee b) = a$. Prosekneme tuto rovnost prvkem δ a dostaneme $\alpha_\delta(a) \wedge \alpha_\delta(a \vee b) = \alpha_\delta(a)$. Takže platí $\alpha_\delta(a) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$ a stejně tak platí $\alpha_\delta(b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$. Takže platí $\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b) \preccurlyeq \alpha_\delta(a \vee b)$ a to dává $\alpha_\delta(a) \vee \alpha_\delta(b) = \alpha_\delta(a \vee b)$. Takže zobrazení α_δ je slučitelné se spojením a jedná se o homomorfismus. ■

Otázka 3.17 Existuje Garsidův monoid M s nejmenším Garsidovým prvkem Δ a M_δ parabolickým podmonoidem M takový, že d_δ existuje, ale neplatí $\delta d_\delta = \Delta$?

Věta 3.18 *Buď M Garsidův monoid a buď Δ jeho nejmenší Garsidův prvek. Buď M_δ parabolický podmonoid monoidu M. Předpokládejme, že d_δ existuje a že platí $\Delta = \delta d_\delta$. Pak je množina M^δ svazem a svaz $M(\Delta)$ je izomorfní semidirektnímu součinu svazů $M(\delta)$ a M^δ.*

DŮKAZ: Podle tvrzení 3.16, je zobrazení α_δ homomorfismus svazů a každá třída ekvivalence vzhledem k homomofismu α_δ je v bijekci s množinou M^δ. Speciálně množina M^δ tvoří třídu ekvivalence, a tak M^δ je podsvaz. Označme $\eta_{a,b}$ zobrazení $c \mapsto b\omega_\delta(c)$ z množiny aM^δ do bM^δ pro všechna a a b v $M(\Delta)$. Zobrazení $\eta_{a,b}$ je bijekcí mezi množinami aM^δ a bM^δ. Navíc zobrazení $\eta_{a,b}$ zachovává uspořádání: vztah $ac \preccurlyeq ac'$ je ekvivalentní vztahu $c \preccurlyeq c'$ a to je ekvivalentní vztahu $bc \preccurlyeq bc'$ pro všechna c, c' v M^δ. Takže $\eta_{a,b}$ je izomorfismus svazů a tvrzení 1.9 dává, že $M(\Delta)$ je semidirektní součin svazů $M(\delta)$ a M^δ.
■

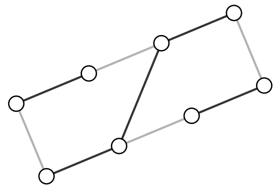
Vidíme, že třídy ekvivalence zobrazení α_δ jsou izomorfní nejen jako svazy, ale i jako podgrafy Cayleyova grafu: když máme hranu z prvku ab do prvku abx, pro a v $M(\delta)$, b v M^δ a x atom, pak tato hrana je označena atomem x. Stejně tak je i hrana z $a'b$ do $a'bx$ označena atomem x pro každé a' v $M(\delta)$.

Každý Artinovský monoid sférického typu je příkladem Garsidova monoidu splňujícího podmínky věty 3.18. V tomto případě je ale svaz dělitelnosti jednoduchých prvků izomorfní svazu slabého uspořádání v příslušné Coxeterově grupě a tento rozklad nám už je znám. Nicméně existují další příklady Garsidových monoidů na které se dá použít věta 3.18.

Příklad 3.19 Uvažujme monoid M daný prezentací $\langle x, y;\ xyx = y^2\rangle$. Tento monoid je Garsidův a jeho nejmenší Garsidův prvek je y^3 (viz [14]). Jednoduché prvky jsou 1, x, y, xy, y^2, yx, yxy a y^3. Podmonoid generovaný prvkem x je parabolický podmonoid monoidu M a x-redukované prvky jsou 1, y, yx a yxy. Poněvadž prvek $x \cdot yxy$ je Garsidův prvek monoidu M, charakteristický graf je semidirektní součin svazů $M(x)$ a M^x (viz obrázek 3.7). Všimněme si též, že podmonoid generovaný prvek y není parabolický, a tak nemůžeme najít strukturu semidirektního součinu vzhledem k vyváženému prvku y.

M. Picantin zavedl ve své dizertační práci [42] pojem křížového součinu Garsidových monoidů, který umožňuje sestrojovat určité Garsidovy monoidy z menších Garsidových monoidů. Dokážeme zde, že charakteristické grafy monoidů sestrojených touto konstrukcí jsou semidirektní součiny.

Definice [42]: Nechť jsou $M_1, \ldots, M_n$ Garsidovy monoidy. Buď i množina atomů monoidu M_i pro i mezi 1 a n. *Systém funkcí splňující reziduální identity* je definován jako



Obrázek 3.7: Charakteristický graf monoidu $\langle x, y;\ xyx = y^2 \rangle$. Šedé hrany vyznačují x a šedé vyznačují y.

systém $\vec{\Theta}$ funkcí $\Theta_{ij} : M_i \times M_j \to M_j$ pro $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$ takový, že pro každé a v M_i je restrikce $\Theta_{ij}(a, \cdot)$ zobrazení Θ_{ij} na $\{a\} \times M_j$ je bijekce množiny M_j, a splňující

$$\Theta_{ij}(ab, c) = \Theta_{ij}(b, \Theta_{ij}(a, c)), \tag{3.5}$$
$$\Theta_{ij}(a, cd) = \Theta_{ij}(a, c)\Theta_{ij}(\Theta_{ji}(c, a), d), \tag{3.6}$$
$$\Theta_{jk}(\Theta_{ij}(a, c), \Theta_{ik}(a, e)) = \Theta_{ik}(\Theta_{ji}(c, a), \Theta_{jk}(c, e)), \tag{3.7}$$

pro a, b v M_i, c, d v M_j, e v M_k a $1 \leqslant i \neq j \neq k \neq i \leqslant n$. *Křížový součin* $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ je definován jako faktor volného součinu monoidů M_i přes kongruenci generovanou všemi dvojicemi $(x\Theta_{ij}(x, y), y\Theta_{ji}(y, x))$ s x v A_i, y v A_j a $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Pro $n = 2$ značíme křížový součin $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$.

Vidíme, že definice křížového součinu nezáleží na uspořádání monoidu $M_1, \ldots, M_n$. Následující dva výsledky jsou dokázány v [42].

Lemma 3.20 [42] *Nechť jsou $M_1, \ldots, M_n$ Garsidovy monoidy. Buď $\vec{\Theta}$ systém funkcí splňující reziduální identity. Pak:*
(i) Platí $\|\Theta_{ij}(a, b)\| = \|b\|$ pro každé i, j mezi 1 a n a každé a z M_i a b z M_j.
(ii) Pro každé i mezi 1 a n zobrazení $a \mapsto a$ je vnořením monoidu M_i do $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$.
(iii) Zobrazení $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto a_1 \cdots a_n$ je bijekce mezi množinami $M_1 \times M_n$ a $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$.

Tvrzení 3.21 [42] *Nechť jsou $M_1, \ldots, M_n$ Garsidovy monoidy. Pak pro každý systém $\vec{\Theta}$ funkcí splňujících reziduální identity je monoid $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ Garsidovým monoidem. Jednoduché prvky monoidu $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ jsou součiny jednoduchých prvků monoidů $M_1, \ldots, M_n$ a svaz jednoduchých prvků monoidu $\bowtie_i^{\vec{\Theta}} M_i$ je izomorfní direktnímu součinu svazů jednoduchých prvků monoidů $M_1, \ldots, M_n$.*

Uvažujme případ křížového součinu dvou monoidů. Tvrzení 3.21 říká, že svaz jednoduchých prvků monoidu $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$ je izomorfní direktnímu součinu svazů jednoduchých prvků monoidů M_1 a M_2. Obecně ale tento svaz není roven direktnímu součinu svazů jednoduchých prvků monoidů M_1 a M_2, což značí, že není pravda, že by každý jednoduchý prvek monoidu $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$, který se píše ab s a jednoduchým v M_1 a b jednoduchým v M_2 splňoval $ab = ba$. A to je důvod proč zde uvažovat konstrukci semidirektního součinu: graf, který se dostane z Hasseova diagramu semidirektního součinu svazů jednoduchých prvků monoidů M_1 a M_2 po označení hran generátory je charakteristický graf monoidu $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$.

Tvrzení 3.22 *Nechť jsou M_1, M_2 Garsidovy monoidy. Buď $\vec{\Theta}$ systém funkcí splňující reziduální identity. Označme Δ_i nejmenší Garsidův prvek monoidu M_i pro $i = 1, 2$ a označme M monoid $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$. Pak je svaz jednoduchých prvků monoidu $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$ roven semidirektnímu součinu $M(\Delta_1) \ltimes^{\varphi} M(\Delta_2)$, kde zobrazení φ je definováno jako $\varphi_{a,ax}(b) = \Theta_{12}(x, b)$ pro každé a v $M(\Delta_1)$, každé b v $M(\Delta_2)$ a každé x atom v M_1. Speciálně je hrana z ab do $ax\Theta_{12}(x, b)$ v charakteristickém grafu označena atomem $\Theta_{21}(b, x)$.*

Důkaz: Podle tvrzení 3.21, je nejmenší Garsidův prvek monoidu M prvek $\Delta_1\Delta_2$. Podle lemmatu 3.20 se prvky monoidu M_1 nikdy nepíší jako součiny prvků z M_1 a z M_2. Takže každý prvek monoidu M_1, který je jednoduchý v M je také jednoduchý v M_1 a podmonoid M_1 je parabolický v M. Jelikož je svaz dělitelů prvku $\Delta_1\Delta_2$ izomorfní součinu svazů jednoduchých prvků v M_1 a v M_2, každý jednoduchý prvek a s $a \wedge \Delta_1 = 1$ je nutně dělitelem Δ_2. Takže prvek Δ_2 je největší prvek množiny M^{Δ_1} a všechny podmínky věty 3.18 jsou splněny. Takže svaz jednoduchých prvků monoidu M je semidirektním součinem $M(\Delta_1) \ltimes^{\varphi} M(\Delta_2)$. Podle definice křížového součinu platí relace $ax\Theta_{12}(x, b) = ab\Theta_{21}(b, x)$ pro každé a v M_1, b v M_2 a x atom v M_1. Podle lemmatu 3.20 (i) je prvek $\Theta_{21}(b, x)$ atom, a tak prvek $ab\Theta(b, x)$ je bezprostředním následníkem prvku ab. Navíc, prvek ab není pravým násobkem prvku ax, poněvadž x náleží do M_1 a b náleží do M_2. Takže platí $ab \vee ax = ax\Theta_{12}(x, b)$ a tvar zobrazení $\varphi_{a,ax}$ vyplývá z relace (1.4). Podle lemmatu 1.15 je zobrazení φ určeno zobrazeními $\varphi_{a,ax}$, protože prvek ax je bezprostřední následník prvku a. ■

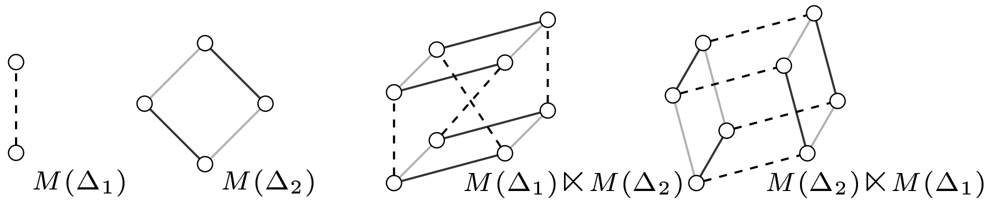
Příklad 3.23 Buď M_1 monoid s prezentací $\langle x; \rangle$ a buď M_2 monoid s prezentací $\langle y, z; zy = yz\rangle$ (jinak řečeno, M_i je volný komutativní monoid o i generátorech). Tyto monoidy jsou Garsidovy a jejich nejmenší Garsidovy prvky jsou $\Delta_1 = x$ a $\Delta_2 = yz$. Buď * onen netriviální automorfismus M_2, tj. homomorfismus z M_2 na M_2 definovaný jako $y^* = z$ a $z^* = y$. Definujeme systém $\vec{\Theta}$ funkcí splňujících reziduální identity následovně:

$$\Theta_{12}(a, b) = b^*, \qquad \text{pro každé } a \text{ v } M_1 \text{ a } b \text{ v } M_2,$$
$$\Theta_{21}(b, a) = a, \qquad \text{pro každé } a \text{ v } M_1 \text{ a } b \text{ v } M_2.$$

Křížový součin $M_1 \bowtie_{\vec{\Theta}} M_2$, označený M, je monoid s prezentací

$$M = \langle x, y, z;\ yz = zy,\ xy = zx,\ xz = yx\rangle. \tag{3.8}$$

Nejmenší Garsidův prvek monoidu M je součin Garsidových prvků monoidů M_1 a M_2, tj. prvek xyz. Poněvadž křížový součin nezáleží na pořadí monoidů M_1 a M_2, charakteristický graf monoidu M je jak semidirektní součin $M(\Delta_1) \ltimes M(\Delta_2)$, tak i semidirektní součin $M(\Delta_2) \ltimes M(\Delta_1)$ (viz obrázek 3.8).



Obrázek 3.8: Semidirektní součiny charakteristických grafů monoidů z příkladu 3.23 dávají charakteristický graf monoidu s prezentací (3.8). Přerušované hrany vyznačují x, šedé vyznačují y a černé vyznačují z.

Část II

Levodistributivní idempotentní grupoidy

Kapitola 4

Identity LD, I, LI a jejich expanze

Tato kapitola je věnována identitám levé samodistributivity, idempotence a levé pseudoidempotence. Definujeme expanze termu t jako jisté termy ekvivalentní termu t větší délky než t a dokážeme, že expanze tvoří konfluentní systém. Pak definujeme řezy termu t a budeme studovat, jaké termy se dostanou jako řezy expanzí termu t. To nám umožní najít normální formu termu t, když je t řezem jiného termu t_0.

V sekci 1 se definují expanze termu a dokáže se konfluence. V sekci 2 se díváme na termy jako na stromy a zavedeme definice, které přicházejí s tímto pohledem. V sekci 3 definujeme řezy termu a dodáme charakterizaci řezů expanzí. V sekci 4 definujeme t_0-∂-normální formu.

4.1 Konfluence expanzí

V této sekci pracujeme s binárními termy, což značí s termy o jedné binární operaci značené $\cdot$. Tato operace nemá být asociativní, a tak musíme používat závorky, abychom rozlišili pořadí násobení. Nicméně je občas příjemnější nepsat příliš závorek, v tom případě píšeme $x \cdot y \cdot z$ namísto $x \cdot (y \cdot z)$. Uvažujeme zde tři identity:

$$\text{Levá samodistributivita – LD} \qquad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot y), \tag{4.1}$$

$$\text{Idempotence – I} \qquad x \cdot x = x, \tag{4.2}$$

$$\text{Levá pseudoidempotence – LI} \qquad (x \cdot x) \cdot y = x \cdot y. \tag{4.3}$$

Říkáme obvykle „levá distributivita“ namísto levá samodistributivita a říkáme „levá idempotence“ namísto levá pseudoidempotence. Vidíme, že levá idempotence je slabší verzí idempotence. Značíme LDI dvojici identit LD+I a LDLI dvojici identit LD+LI.

V této sekci zavedeme pojem expanze termu a dokážeme, že expanze tvoří konfluentní systém, což znamená, že dvě libovolné expanze mají vždy společnou expanzi. Zvolíme teď pevně množinu proměnných X. Označíme T_X množinu termů, jejichž proměnné jsou v X.

Definice: Buďte t, t' dva termy z T_X.
(i) Řekneme, že t' je *základní LD-expanzí* termu t, jestliže se dostane z t nahrazením podtermu $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$ termem $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)$.
(ii) Řekneme, že t' je *základní I-expanzí* termu t, jestliže se dostane z t nahrazením podtermu t_1 termem $t_1 \cdot t_1$.
(iii) Řekneme, že t' je *základní LI-expanzí* termu t, jestliže se dostane z t nahrazením podtermu $t_1 \cdot t_2$ termem $(t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$.
(iv) Řekneme, že t' je *základní LDI-expanzí* termu t, jestliže je t' základní LD-expanze termu t nebo základní I-expanze termu t.
(v) Řekneme, že t' je *základní LDLI-expanzí* termu t, jestliže je t' základní LD-expanze termu t nebo základní LI-expanze termu t.

V následujícím textu předpokládáme, že je ¤ jeden ze systémů identit LD, I, LI, LDI, LDLI. Označíme $\overset{¤}{=}_X$ nejmenší kongruenci na množině T_X generovanou identitami ¤. Podle definice, je-li term t' základní ¤-expanzí termu t, pak jsou termy t a t' ¤-ekvivalentní, tj. máme $t \overset{¤}{=}_X t'$. Opačná implikace je vyjádřena v následujícím lemmatu, které je jednoduché:

Lemma 4.1 *Buďte t, t' dva termu v T_X. Pak jsou termy t a t' ¤-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud existuje posloupnost termů $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ taková, že pro každé i mezi 1 a k, je buďto t_i základní ¤-expanze termu t_{i-1}, anebo t_{i-1} je základní ¤-expanze termu t_i.*

Následující tvrzení říká, že můžeme vypustit index X z označení relace $\overset{¤}{=}_X$:

Tvrzení 4.2 *Nechť je X podmnožinou X', Pak je pro dva libovolné termy t, t' z T_X relace $t \overset{¤}{=}_{X'} t'$ ekvivalentní relaci $t \overset{¤}{=}_X t'$.*

Důkaz: Nechť t a t' náleží do T_X a mějme $t \overset{¤}{=}_{X'} t'$. Podle lemmatu 4.1 existuje posloupnost $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ taková, že sousední termy jsou základní ¤-expanze jeden druhého. Poněvadž ¤-expanze zachovávají množinu proměnných, které se objevují v termech, všechny termy t_i pro $i \leqslant k$, náleží do T_X. Opět podle lemmatu 4.1 dostaneme $t \overset{¤}{=}_X t'$. ■

Iterujeme pojem expanze, abychom dostali, že základní ¤-expanze je 1-¤-expanzí.

Definice: Řekneme, že term t' je k-¤-*expanzí* termu t, pokud existuje posloupnost $t = t_0, t_1, \ldots, t_k = t'$ taková, že t_i je základní ¤-expanzí termu t_{i-1} pro každé i mezi 1 a k. Řekneme, že t' je ¤-*expanzí* termu t (označení $t \xrightarrow{¤} t'$), pokud existuje k takové, že t' je k-¤-expanzí termu t.

Následující lemma je jednoduché:

Lemma 4.3 *Nechť je term t'_i k_i-¤-expanze termu t_i pro $i = 1, 2$. Pak je term $t'_1 \cdot t'_2$ $(k_1 + k_2)$-¤-expanzí termu $t_1 \cdot t_2$.*

Stejně jako v [12] zavedeme operaci iterované levé distribuce:

Definice (stejnoměrná distribuce [12]): Buďte t_0, t dva termy. Term $t_0 * t$ je definován induktivně:

$$t_0 * t = \begin{cases} t_0 \cdot t & \text{pokud je } t \text{ proměnná,} \\ (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.4}$$

Lze dokázat indukcí, že se term $t_0 * t$ dostane z termu t pomocí substituce $x \mapsto t_0 \cdot x$.

Lemma 4.4 [12]
(i) Pro dva termy t_0, t je term $t_0 * t$ LD-expanzí termu $t_0 \cdot t$.
(ii) Nechť je t' ¤-expanze termu t. Pak je pro každé t_0 term $t_0 \cdot t'$ ¤-expanzí termu $t_0 \cdot t$.
(iii) Předpokládejme $t_0 \xrightarrow{\text{LD}} t'_0$. Pak pro každé t platí $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LD}} (t'_0 * t)$.
(iv) Předpokládejme $t_0 \xrightarrow{\text{LDI}} t'_0$. Pak pro každé t platí $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LDI}} (t'_0 * t)$.
(v) Předpokládejme $t_0 \xrightarrow{\text{LDLI}} t'_0$. Pak pro každé t platí $(t_0 * t) \xrightarrow{\text{LDLI}} (t'_0 * t)$.
(vi) Pro každé t_0, t_1, t_2 platí $(t_0 * (t_1 * t_2)) \xrightarrow{\text{LD}} ((t_0 * t_1) * (t_0 * t_2))$.

DŮKAZ: Body (i), (iii) a (vi) jsou dokázány v [12], takže dokážeme jen body (ii), (iv) a (v).

Začněme bodem (ii). Stačí udělat důkaz jen když je term t' základní ¤-expanzí termu t. Předpokládejme nejdřív, že z $t' = t \cdot t$ plyne $t \xrightarrow{\text{I}} t'$. Platí $t_0 * t' = (t_0 * t) \cdot (t_0 * t)$, což je I-expanze termu $t_0 * t$.

Následně předpokládejme $t = t_1 \cdot t_2$ a $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$, což je speciální případ LI-expanze. Pak máme $t_0 * t' = ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_1)) \cdot (t_0 * t_2)$, což je LI-expanze termu $(t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2)$.

Teď předpokládejme $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ a $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$. Platí

$$t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot ((t_0 * t_3) \cdot (t_0 * t_4)) \xrightarrow{\text{LD}} ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_3)) \cdot ((t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_4)) = t_0 * t'.$$

Ostatní případy se dokáží indukcí podle t. Nechť je t' základní ¤-expanzí termu t, odlišnou od už uvažovaných expanzí. Je-li t proměnná, pak výsledek platí, protože žádná jiná základní expanze není možná. Nechť je tedy $t = t_1 \cdot t_2$ a nechť se t' dostane z t nahrazením podtermu s termu t termem s'. Pokud je s podterm t_1, pak se term t' napíše jako $t_1' \cdot t_2$ pro t_1' $\sharp$-expanzi termu t_1. Podle indukčního předpokladu je $t_0 * t_1'$ $\sharp$-expanze termu $t_0 * t_1$ a nalezneme

$$t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) \xrightarrow{\sharp} (t_0 * t_1') \cdot (t_0 * t_2) = t_0 * t'.$$

Případ, kdy je s podterm termu t_2 je podobný a případ $s = t$ už byl řešen na začátku důkazu.

Nakonec uvažujme bod (iv), který se dokáže indukcí podle t. Je-li t proměnná, platí $t_0' * t = t_0' \cdot t$, což je, podle lemmatu 4.3, LDI-expanze termu $t_0 \cdot t$. Předpokládejme nyní $t = t_1 \cdot t_2$. Podle indukčního předpokladu je term $t_0' * t_i$ LDI-expanze termu $t_0 * t_i$ pro $i = 1, 2$. Vyvodíme z toho podle lemmatu 4.3 $t_0 * t = (t_0 * t_1) \cdot (t_0 * t_2) \xrightarrow{\text{LDI}} (t_0' * t_1) \cdot (t_0' * t_2) = t_0' * t$ a to je to, co jsme chtěli dokázat. Důkaz bodu (v) je podobný. ∎

Nyní zavedeme operátory *dilatace.* Dokážeme později, že tyto operátory hrají roli jakýchsi „horních mezí“ pro všechny možné základní expanze termu.

Definice (operátory ∂ [12]): Nechť je t term. Definujeme termy $\partial_{\text{LD}} t$, $\partial_{\text{LDI}} t$ a $\partial_{\text{LDLI}} t$ induktivně:

$$\partial_{\text{LD}} t = \begin{cases} t & \text{pokud je } t \text{ proměnná,} \\ \partial_{\text{LD}} t_1 * \partial_{\text{LD}} t_2 & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\partial_{\text{LDI}} t = \begin{cases} t \cdot t & \text{pokud je } t \text{ proměnná,} \\ \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDI}} t_2 & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\partial_{\text{LDLI}} t = \begin{cases} t & \text{pokud je } t \text{ proměnná,} \\ \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2 & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.7}$$

Příklad 4.5 Mějme term $t = x \cdot (y \cdot z)$. Spočítáme konkrétně termy $\partial_\sharp t$. Poněvadž je definice induktivní, vypočítáme nejdříve ∂ podtermů termu t. Máme $\partial_{\text{LD}} x = x$, $\partial_{\text{LD}} y = y$, $\partial_{\text{LD}} z = z$ a $\partial_{\text{LD}} yz = y * z = y \cdot z$, a tak máme $\partial_{\text{LD}} t = x * (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot (x \cdot z)$. Pro LDI máme $\partial_{\text{LDI}} x = x \cdot x$, $\partial_{\text{LD}} y = y \cdot y$, $\partial_{\text{LD}} z = z \cdot z$ a $\partial_{\text{LD}} yz = (y \cdot y) * (z \cdot z) = ((y \cdot y) \cdot z) \cdot ((y \cdot y) \cdot z)$. Takže máme $\partial_{\text{LDI}} t = (x \cdot x) * ((y \cdot y) \cdot z) \cdot ((y \cdot y) \cdot z) =$

$$((((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)) \cdot ((((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)).$$

Nakonec pro LDLI máme $\partial_{\text{LDLI}} z = z$ a $\partial_{\text{LDLI}} yz = (y \cdot y) * z = ((y \cdot y) \cdot z)$, a tak máme $\partial_{\text{LDLI}} t = (x \cdot x) * ((y \cdot y) \cdot z) = (((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot ((x \cdot x) \cdot z)$.

V [12] se dokazuje, že $\partial_{\text{LD}} t$ je LD-expanze všech možných základních LD-expanzí termu t. V [38] Larue dokázal, že $\partial_{\text{LDI}} t$ je LDI-expanze všech možných základních LDI-expanzí termu t. Analogicky dokážeme, že $\partial_{\text{LDLI}}t$ je LDLI-expanze všech možných základních LDLI-expanzí termu t. Začneme souvislostí mezi $\partial_{\text{LD}}t$, $\partial_{\text{LDI}}t$ a $\partial_{\text{LDLI}}t$.

Lemma 4.6 [38] (i) *Pro term t platí $\partial_{\text{LDI}}t = \partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDLI}}t$.*
(ii) *Pro term t platí $\partial_{\text{LD}}t \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}}t \xrightarrow{\text{I}} \partial_{\text{LDI}}t$.*

Důkaz: (i) Výsledek dokážeme indukcí podle t. Vše je zřejmé, když je t proměnná. Nechť je $t = t_1 \cdot t_2$. Platí

$$\begin{aligned}\partial_{\text{LDI}}t = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2 = \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{\text{LDLI}}t_2 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_2) = \\ = (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_2) \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_2) = \partial_{\text{LDLI}}t \cdot \partial_{\text{LDLI}}t.\end{aligned}$$

(ii) Relace $\partial_{\text{LDLI}}t \xrightarrow{\text{I}} \partial_{\text{LDI}}t$ vyplývá z (i). Dokážeme $\partial_{\text{LD}}t \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}}t$ indukcí podle t. Když je t proměnná, tak to platí, uvažujme tedy $t = t_1 \cdot t_2$. Pak platí $\partial_{\text{LD}}t = \partial_{\text{LD}}t_1 * \partial_{\text{LD}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t = \partial_{\text{LDLI}}t$. ∎

Definice: Pro každý term t definujeme $\lg(t)$ následovně:

$$\lg(t) = \begin{cases} 1 & \text{když je } t \text{ proměnná,} \\ \lg(t_1) + \lg(t_2) + 1 & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.8}$$

Číslo $\lg(t)$ označuje počet proměnných plus počet znamének $\cdot$, která se objevují v termu t.

Lemma 4.7 *Pro každý term t platí nerovnosti*

$$\lg(\partial_{\text{LD}}t) \leqslant \lg(\partial_{\text{LDLI}}t) \leqslant 2^{\lg(t)} - 1 \qquad a \qquad \lg(\partial_{\text{LDI}}t) \leqslant 2^{\lg(t)+1} - 1. \tag{4.9}$$

Důkaz: Zapišme nejdřív následující rovnost, která je dokázána v [12]:

$$\lg(t_0 * t) = (\lg(t_0) + 3)(\lg(t) + 1)/2 - 1.$$

Nyní dokážeme odhad pro $\partial_{\text{LDI}}t$ indukcí podle t. Odhad je správný, když je t proměnná. Nechť je $t = t_1 \cdot t_2$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lg(\partial_{\text{LDI}}t) &= \lg(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2) = (\lg(\partial_{\text{LDI}}t_1) + 3)(\lg(\partial_{\text{LDI}}t_2) + 1)/2 - 1 \\ &\leqslant (2^{\lg(t_1)+1} - 1 + 3)(2^{\lg(t_2)+1} - 1 + 1)/2 - 1 \\ &= 2^{\lg(t_1)+\lg(t_2)+1} + 2^{\lg(t_2)+1} - 1 \\ &\leqslant 2^{\lg(t_1)+\lg(t_2)+2} - 1 = 2^{\lg(t)+1} - 1.\end{aligned}$$

Podle lemmatu 4.6 platí $\lg(\partial_{\text{LDI}}t) = 2\lg(\partial_{\text{LDLI}}t) + 1$. A nerovnost $\lg(\partial_{\text{LD}}t) \leqslant \lg(\partial_{\text{LDLI}}t)$ je evidentní. ∎

Odsud až do konce sekce označuje symbol ⌑ jeden ze systémů identit LD, LDI nebo LDLI.

Lemma 4.8 *Pro každý term t platí $t \xrightarrow{\square} \partial_{\square} t$.*

DŮKAZ: Výsledek $t \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LD}} t$ je dokázán v [12]. Pak uvažujme případ $\partial_{\text{LDLI}} t$, který dokážeme indukcí podle t. Výsledek platí, když je t proměnná. Nechť je $t = t_1 \cdot t_2$. Platí $\partial_{\text{LDLI}} t = \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2$. Podle indukčního předpokladu je term $\partial_{\text{LDLI}} t_1$ LDLI-expanzí termu t_1 a term $\partial_{\text{LDLI}} t_2$ je LDLI-expanzí termu t_2, což podle lemmatu 4.4 implikuje

$$t_1 \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_1) \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{LDLI}} t_2.$$

Nakonec uvažujme případ $\partial_{\text{LDI}} t$. Podle lemmatu 4.6, pokud je $\partial_{\text{LDLI}} t$ LDLI-expanzí termu t, pak je $\partial_{\text{LDI}} t$ LDI-expanzí termu t. ■

Nyní dokážeme, že term ∂t je společnou expanzí všech základních expanzí termu t.

Tvrzení 4.9 *Buďte t, t' dva termy. Pokud je t' základní $\square$-expanze termu t, pak je $\partial_{\square} t$ $\square$-expanze termu t'.*

DŮKAZ: (i) Výsledek $t' \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LD}} t$ je dokázán v [12].

(ii) Dokážeme $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t$ indukcí podle t. Výsledek je okamžitý pro t proměnnou. Předpokládejme $t = t_1 \cdot t_2$ a že se term t' dostane z t nahrazením podtermu s termem s'. Je-li s podterm termu t_1, pak máme $t' = t_1' \cdot t_2$ nějaký term t_1'. Poněvadž je term t_1' základní LDLI-expanze termu t_1, dle indukčního předpokladu víme, že je $\partial_{\text{LDLI}} t_1$ LDLI-expanzí termu t_1'. Nyní platí $t_1' \cdot t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LI}} \partial_{\text{LDI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LDLI}} t$. Případ, kdy je s podtermem termu t_2 je podobný.

Zbývají dva případy, a to LI-expanze a LD-expanze v kořeni termu t. Mějme nejdřív $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$. Platí $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_1) \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 = \partial_{\text{LDI}} t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}} t_2 \xrightarrow{\text{LD}} \partial_{\text{LDLI}} t$. Nyní druhý případ, a to $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ a $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$. Podle lemmatu 4.8 je term $\partial_{\text{LDLI}} t$ LDLI-expanzí termu $t_1 * t_2$. Ale tento term je roven termu $(t_1 * t_3) \cdot (t_1 * t_4)$, což je LD-expanze termu t_1'.

(iii) Dokážeme nakonec $t' \xrightarrow{\text{LDI}} \partial_{\text{LDI}} t$. Pokud je term t' LDLI-expanzí termu t, jsme hotovi, poněvadž $\partial_{\text{LDI}} t$ je I-expanze termu $\partial_{\text{LDLI}} t$. Pokud je t' I-expanzí, která mění vlastní podterm termu t, stejný argument je možný jako v případě LDLI. Zbývá tedy $t' = t \cdot t$. Máme $t' \xrightarrow{\text{LDLI}} \partial_{\text{LDLI}} t \cdot \partial_{\text{LDLI}} t = \partial_{\text{LDI}} t$, což je potřebný výsledek. ■

Příklad 4.10 Term $\partial_{\square} t$ není obecně nejmenší společnou $\square$-expanzí všech základních $\square$-expanzí termu t. Definujme plný term výšky k na proměnné x jako:

$$\mathrm{full}_0 = x \qquad \mathrm{full}_k = \mathrm{full}_{k-1} \cdot \mathrm{full}_{k-1}\,. \tag{4.10}$$

Uvažujme term $t = (x \cdot x) \cdot x \cdot x \cdot x$. Je snadné dokázat, že term full_3 je LD-expanzí všech základních LD-expanzí termu t a že term full_4 je společnou LDI-expanzí všech základních

LDI-expanzí termu t. Přesto je term $\partial_{\text{LD}}t$ vlastní LD-expanzí termu full_3 a term $\partial_{\text{LDI}}t$ je vlastní LDI-expanzí termu full_4. Příklad pro LDLI je podobný.

Následujícím cílem je dokázat, že operátory ∂ rostou vzhledem k expanzím.

Lemma 4.11 *Buďte t, t' dva termy. Pak $t \xrightarrow{¤} t'$ implikuje $\partial_{¤}t \xrightarrow{¤} \partial_{¤}t'$.*

DŮKAZ: Výsledek pro identitu LD je dokázán v [12]. Uvažujme případ LDLI a předpokládejme, že t' je základní LDLI-expanze termu t. Použijeme indukci podle t. Když je t proměnná, výsledek je očividný. Předpokládejme tedy $t = t_1 \cdot t_2$. Term t se dostane z termu t nahrazením termu s termem s'. Je-li s podterm termu t_1, pak je term t' ve tvaru $t'_1 \cdot t$ pro nějaké t'_1. Dle indukčního předpokladu je term $\partial_{\text{LDLI}}t'_1$ LDLI-expanzí termu $\partial_{\text{LDLI}}t_1$ a to dává $\partial_{\text{LDLI}}t = (\partial_{\text{LDLI}}t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDLI}}t'_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t'_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 = \partial_{\text{LDLI}}t'$. Případ s podtermu t_2 je podobný.

Pro $t' = (t_1 \cdot t_1) \cdot t_2$ platí $\partial_{\text{LDLI}}t = (\partial_{\text{LDLI}}t_1 \cdot \partial_{\text{LDLI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_2 \xrightarrow{\text{LDLI}} (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_1) * \partial_{\text{LDLI}}t_1 = \partial_{\text{LDLI}}t'$. Pro $t = t_1 \cdot (t_3 \cdot t_4)$ a $t' = (t_1 \cdot t_3) \cdot (t_1 \cdot t_4)$ platí $\partial_{\text{LDLI}}t = \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{\text{LDI}}t_3 * \partial_{\text{LDLI}}t_4)$ a $\partial_{\text{LDLI}}t' = (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_3) * (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDLI}}t_4)$ a můžeme použít lemma 4.4. Všechny případy byly vyčerpány a to končí důkaz pro LDLI. Důkaz pro LDI je podobný tomu pro LDLI. ∎

Nyní už můžeme dokázat hlavní výsledek této sekce, kterým je konfluence ¤-expanzí.

Definice: Pro dva termy t a t' definujeme $d_{¤}(t, t')$, ¤-*vzdálenost* mezi t a t', jako nejmenší počet ¤-identit, které se musí použít, abychom dostali term t' z termu t. Pokud termy t a t' nejsou ¤-ekvivalentní, píšeme $d_{¤}(t, t') = \infty$.

Tvrzení 4.12 *Buďte t a t' dva termy. Předpokládejme $d_{¤}(t, t') = k < \infty$. Pak je term $\partial_{¤}^k t$ ¤-expanzí termu t'.*

DŮKAZ: Použijeme indukci podle k. Výsledek je zřejmý pro $k = 0$, předpokládejme tedy $k > 0$. Existuje term t'' s $d_{¤}(t, t'') = k - 1$ a $d_{¤}(t', t'') = 1$. Podle indukčního předpokladu je prvek $\partial_{¤}^{k-1}t$ ¤-expanzí termu t. Máme nyní dvě možnosti: buďto je t'' základní ¤-expanzí termu t', pak platí $t' \xrightarrow{¤} t'' \xrightarrow{¤} \partial_{¤}^{k-1}t \xrightarrow{¤} \partial_{¤}^k t$, anebo je t' základní ¤-expanzí termu t'', pak je prvek $\partial_{¤}t''$ ¤-expanzí termu t', podle lemmatu 4.9. Následně, podle lemmatu 4.11, je term $\partial_{¤}^k t$ ¤-expanzí termu $\partial_{¤}t''$, a tak je i ¤-expanzí termu t'. ∎

Poněvadž pro každý term t', který je k-¤-expanzí termu t, máme $d_{¤}(t, t') \leqslant k$, odvodíme z toho:

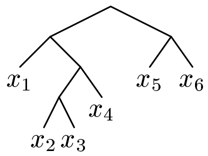
Důsledek 4.13 *Nechť je term t' k-⌑-expanzí termu t. Pak je term $\partial^k_{⌑} t$ ⌑-expanzí termu t'.*

Stojí za povšimnutí, že pro jakoukoliv dvojici t a t' termů je relace $t \xrightarrow{⌑} t'$ rozhodnutelná. Stačí pouze vyčíslit všechny ⌑-expanze termu t', které mají kratší délku než t, protože počet takovýchto expanzí je konečný.

4.2 Termy jako stromy

V této přípravné sekci se na termy díváme jako na binární stromy. Zavedeme definice, které jsou přirozené z pohledu stromů a které usnadňují práci s termy.

Každý term z množiny T_X lze přirozeně zobrazit jako binární strom, jehož listy jsou označeny proměnnými z X. Příklad vidíme na obrázku 4.1.



Obrázek 4.1: Strom, který reprezentuje term $(x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)) \cdot (x_5 \cdot x_6)$.

Každý podterm s termu t odpovídá jedné cestě ve stromu reprezentujícím term t – cestě z kořene termu t do kořene termu s. Tato cesta se dá popsat jako posloupnost rozcestí nalevo a napravo.

Definice: *Adresa* je konečná posloupnost 0 a 1. Prázdná adresa se značí $\varnothing$. Množina všech adres se značí $\mathbf{A}$. Adresa α se nazývá *koncová,* jestliže platí $\alpha = 1^p$ pro $p \geqslant 0$.

Když píšeme adresy, zapisujeme jednoduše jednu číslici vedle druhé; takže 00 a 1011 jsou adresy, které odpovídají postupně cestám „vlevo–vlevo“ a „vpravo–vlevo–vpravo–vpravo“. Jsou-li α a β dvě adresy, pak $\alpha\beta$ je adresa, která se dostane navázáním adres α a β. Množina $\mathbf{A}$ s operací konkatenace je volný monoid na $\{0, 1\}$.

Definice: Pro α a β v $\mathbf{A}$ řekneme, že α je *předpona* adresy β, označení $\alpha \sqsubseteq \beta$, pokud platí $\beta = \alpha\gamma$ pro nějakou adresu γ z $\mathbf{A}$.

Lemma 4.14 [12] *Relace $\sqsubseteq$ je částečné uspořádání na $\mathbf{A}$; Adresa $\varnothing$ je nejmenší prvek a pro každou adresu α jsou přípony adresy α lineárně uspořádané relací $\sqsubseteq$.*

Definice: Pro α, β v $\mathbf{A}$ řekneme, že se α nachází *napravo od* β nebo, že se β nachází *nalevo od* α, označení $\alpha >_{\text{LR}} \beta$, pokud existuje adresa γ, která splňuje $\gamma 1 \sqsubseteq \alpha$ a $\gamma 0 \sqsubseteq \beta$. Řekneme, že α a β jsou kolmé, označení $\alpha \perp \beta$, pokud platí $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ nebo $\beta >_{\text{LR}} \alpha$.

Relace $>_{\text{LR}}$ je částečné uspořádání na $\mathbf{A}$.

Definice (předcházení): Pro α, β v $\mathbf{A}$ píšeme $\alpha > \beta$ tehdy a jen tehdy, platí-li $\alpha >_{\text{LR}} \beta$ nebo $\alpha \sqsubset \beta$.

Lemma 4.15 [**12**] *Relace $<$ je lineární uspořádání na $\mathbf{A}$ a $\varnothing$ je největším prvkem v $(\mathbf{A}, <)$. Každá adresa ve tvaru $\alpha 1$ má α jako bezprostředního následníka a každá adresa ve tvaru $\alpha 0$ je infimem klesající posloupnosti $\alpha 1$, $\alpha 10$, $\alpha 100$, ...*

Definice: Nechť je t term. Pro α adresu z $\mathbf{A}$ je *podterm termu t v α*, nebo α-podterm termu t, term $\operatorname{sub}(t, \alpha)$, který je možno definovat jako:

$$\operatorname{sub}(t, \alpha) = \begin{cases} t & \text{pro } \alpha = \varnothing, \\ \operatorname{sub}(t_1, \beta) & \text{pro } \alpha = 0\beta \text{ a } t = t_1 \cdot t_2, \\ \operatorname{sub}(t_2, \beta) & \text{pro } \alpha = 1\beta \text{ a } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{4.11}$$

Příklad 4.16 Mějme term t z obrázku 4.1. Máme například $\operatorname{sub}(t, 1) = x_5 \cdot x_6$, $\operatorname{sub}(t, 01) = (x_2 \cdot x_3) \cdot x_4$ a $\operatorname{sub}(t, 0110) = x_3$. Všimněme si též, že term $\operatorname{sub}(t, 000)$ není definován.

Lemma 4.17 [**12**] *Buď t term a buďte α a β dvě adresy. Pak platí vztah $\operatorname{sub}(t, \alpha\beta) = \operatorname{sub}(\operatorname{sub}(t, \alpha), \beta)$: buďto oba termy existují a jsou rovny, anebo ani jeden z nich není definován.*

Definice: Buď t term. Řekneme, že α je adresa *v t*, pokud podterm $\operatorname{sub}(t, \alpha)$ existuje. V tom případě řekneme, že α je *vnější* v t, pokud je $\operatorname{sub}(t, \alpha)$ proměnná, a je *vnitřní* jinak. *Kostra* termu t je definována jako množina $\operatorname{Skel}(t)$ všech adres v t; *obrys* termu t je definován jako množina $\operatorname{Out}(t)$ všech vnějších adres v t.

Příklad 4.18 Buď t term z obrázku 4.1. Pak kostra termu t sestává z 11 adres, a to 00, 0100, 0101, 010, 011, 01, 0, 10, 11, 1 a $\varnothing$, uspořádaných uspořádáním $<$. Mezi nimi jsou adresy 11, 10, 011, 0101, 0100 a 00 v obrysu termu t. Tyto adresy jsou uspořádány uspořádáním $>_{\text{LR}}$.

Definice: Nechť je α adresa B množina adres. Definujeme $\operatorname{sh}_\alpha(B)$ jako množinu $\{\alpha\beta; \beta \in B\}$.

Lemma 4.19 [12] *Pro term t rovný $t_1 \cdot t_2$ platí*

$$\mathrm{Skel}(t) = \{\varnothing\} \cup \mathrm{sh}_0(\mathrm{Skel}(t_1)) \cup \mathrm{sh}_1(\mathrm{Skel}(t_2)), \tag{4.12}$$
$$\mathrm{Out}(t) = \mathrm{sh}_0(\mathrm{Out}(t_1)) \cup \mathrm{sh}_1(\mathrm{Out}(t_2)). \tag{4.13}$$

Lemma 4.20 [12] *Nechť je t term. Pak adresa α náleží do kostry termu t, tehdy a jen tehdy, pokud existuje adresa β taková, že $\alpha\beta$ náleží do obrysu termu t.*

Označení: Buď t term a buď α z $\mathrm{Skel}(t)$. Pak existují jednoznačná čísla p a q taková, že $\alpha 0^p$ a $\alpha 1^q$ náleží do obrysu t. Nehrozí-li záměna píšeme $\alpha 0^*$ a $\alpha 1^*$ místo těchto adres, abychom nemuseli zavádět čísla p a q.

4.3 Řezy termu

Cílem této sekce je dát kritérium, které umožní dokázat, že dva termy nejsou LDI- nebo LDLI-ekvivalentní. Prozatím existují dvě hlavní syntaktické metody pro dokázání, že dva termy t a t' nejsou LDI-ekvivalentní:
- sledovat proměnné: termy t a t' jsou LDI-ekvivalentní pouze pokud mají stejné množiny proměnných, stejnou nejlevější proměnnou a stejnou nejpravější proměnnou;
- zavést váhu: zvolíme číslo p mezi 0 a 1 a čísla w_x pro každou proměnnou x a definujeme váhu termu s jako

$$w(s) = \begin{cases} w_x & \text{pro } s = x, \text{ proměnnou,} \\ p \cdot w(s_1) + (1-p) \cdot w(s_2) & \text{pro } s = s_1 \cdot s_2. \end{cases} \tag{4.14}$$

Snadno se dokáže, že dva termy t a t' jsou LDI-ekvivalentní pouze pokud platí $w(t) = w(t')$ pro jakoukoliv váhu w: evidentně platí $w(t_1) = w(t_1 \cdot t_1)$ a $w(t_1 \cdot t_2 \cdot t_3) = w((t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3))$ a zbytek plyne z indukce.

Sestrojíme nyní nové kritérium. Definujeme zde iterované levé podtermy termu a řezy termu a dokážeme, že se jedná, modulo $\mathbin{\text{¤}}$-ekvivalence, o stejný pojem. Poté dáme jejich jinou charakterizaci, a ta umožní v konkrétních případech dokázat, že term t nemůže být podterm termu t'. Symbol $\mathbin{\text{¤}}$ označuje znovu některý ze systému identit LD, LDI či LDLI.

Definice (iterovaný levý podterm): Pro dva termy t_1 a t_2 píšeme $t_1 \sqsubset t_2$, pokud platí $t_1 = \mathrm{sub}(t_1, 0^p)$ pro nějaké $p > 0$. Označíme $t_1 \sqsubseteq t_2$ stejnou relaci s $p \geqslant 0$. Píšeme $t_1 \sqsubseteq_{\text{¤}} t_2$, pokud existují termy t_1 a t_2 s $t_1' \overset{\text{¤}}{=} t_1$, $t_2' \overset{\text{¤}}{=} t_2$ a $t_1' \sqsubseteq t_2'$.

Je evidentní, že relace $\sqsubset$ a $\sqsubseteq$ jsou tranzitivní. Totéž platí pro $\sqsubseteq_{\text{¤}}$, protože z relací $t \sqsubseteq_{\text{¤}} t'$ a $t' \sqsubseteq_{\text{¤}} t''$ vyplývá existence termů $s_1, \ldots, s_p$ a $s_1', \ldots, s_{p'}'$ splňujících $t' \overset{\text{¤}}{=} (\cdots (t \cdot s_1) \cdot$

$s_2)\cdots)\cdot s_p$ a $t'' \overset{\text{⌑}}{=} (\cdots(t'\cdot s'_1)\cdot s'_2)\cdots)\cdot s'_{p'}$. Takže platí

$$t'' \overset{\text{⌑}}{=} (\cdots(\cdots(t\cdot s_1)\cdot s_2)\cdots)\cdot s_p)\cdot s'_1)\cdot s'_2)\cdots)\cdot s'_{p'}$$

a vidíme $t \sqsubseteq_{\text{⌑}} t''$.

Relace $\sqsubseteq_{\text{LD}}$ je částečné uspořádání, tzn., platí $t_1 \sqsubseteq_{\text{LD}} t_2$ a zároveň $t_2 \sqsubseteq_{\text{LD}} t_2$ tehdy a jen tehdy, máme-li $t_1 \overset{\text{LD}}{=} t_2$ (viz [12]). Tento výsledek neplatí pro $\sqsubseteq_{\text{LDI}}$ a $\sqsubseteq_{\text{LDLI}}$: platí například $x\cdot y \sqsubset (x\cdot y)\cdot x \sqsubset ((x\cdot y)\cdot x)\cdot((x\cdot y)\cdot y)$ a $x\cdot y \overset{\text{LDI}}{=} ((x\cdot y)\cdot x)\cdot((x\cdot y)\cdot y)$. Ale termy $x\cdot y$ a $(x\cdot y)\cdot x$ nejsou LDI-ekvivalentní, protože identity LD a I zachovávají nejpravější proměnnou. Takže platí $x\cdot y \sqsubseteq_{\text{LDI}} (x\cdot y)\cdot x$ a $(x\cdot y)\cdot x \sqsubseteq_{\text{LDI}} x\cdot y$, přestože platí $x\cdot y \overset{\text{LDI}}{\neq} (x\cdot y)\cdot x$.

Dobrou vlastností iterovaných podtermů je, že jsou zachovávány, až na ⌑-expanze, ⌑-expanzemi:

Tvrzení 4.21 *Buďte t a t' dva termy. Nechť je term t' k-⌑-expanzí termu t a nechť je $\mathrm{sub}(t, 0^p)$ definován. Pak existují p' a k' s $p' \geqslant p$ a $k' \leqslant k$ takové, že $\mathrm{sub}(t', 0^{p'})$ je k'-⌑-expanze termu $\mathrm{sub}(t, 0^p)$.*

DŮKAZ: Můžeme předpokládat, že term t' je základní ⌑-expanzí termu t. Výsledek dokážeme indukcí podle t. Když je t proměnná, výsledek platí. Předpokládejme $t = t_1\cdot t_2$ a $t' = t'_1\cdot t'_2$. Pokud je p rovno 0, pak je výsledek triviální. Předpokládejme $p > 0$. Máme tři možnosti. Pokud se t' dostane z t nahrazením podtermu termu t_1, pak platí pro každé p' dost velké rovnost $\mathrm{sub}(t', 0^{p'}) = \mathrm{sub}(t'_1, 0^{p'-1})$ a dle indukčního předpokladu existuje $p' \geqslant p$ takové, že term $\mathrm{sub}(t'_1, 0^{p'-1})$ je buďto roven $\mathrm{sub}(t_1, 0^{p-1})$ anebo je základní expanzí termu $\mathrm{sub}(t_1, 0^{p-1})$. Pokud se t' dostane nahrazením podtermu termu t_2, pak platí $\mathrm{sub}(t, 0^p) = \mathrm{sub}(t, 0^{p-1})$. Nakonec, je-li expanze prováděna v kořeni termu t, pak platí $t_2 = t_3\cdot t_4$ a $t' = (t_1\cdot t_3)\cdot(t_1\cdot t_4)$ nebo $t' = (t_1\cdot t_2)\cdot(t_1\cdot t_2)$ nebo $t' = (t_1\cdot t_1)\cdot t_2$ a vidíme, že platí $\mathrm{sub}(t, 0^p) = \mathrm{sub}(t, 0^{p+1})$. ■

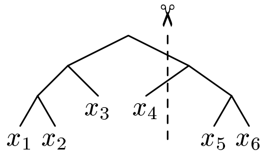
Následující lemma je evidentní:

Lemma 4.22 *Nechť je term s podtermem termu t. Nechť je s' k-⌑-expanze termu s. Nechť se term t' dostane z termu t nahrazením podtermu s termem s'. Pak je term t' k-⌑-expanzí termu t.*

Nyní definujeme hlavní pojem této sekce, a to řez termu.

Definice: Pro term t a adresu α v $\mathrm{Skel}(t)$ definujeme *řez termu t v α* jako term $\mathrm{cut}(t, \alpha)$ induktivně:

$$\mathrm{cut}(t,\alpha) = \begin{cases} t & \text{pro } \alpha = \varnothing, \\ \mathrm{cut}(t_1, \beta) & \text{pro } \alpha = 0\beta \text{ a } t = t_1\cdot t_2, \\ t_1\cdot \mathrm{cut}(t_2, \beta) & \text{pro } \alpha = 1\beta \text{ a } t = t_1\cdot t_2. \end{cases} \tag{4.15}$$



Obrázek 4.2: Řez termu $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot (x_5 \cdot x_6))$ v adrese 10 je term $((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$.

Příklad 4.23 Provést řez termu t ve vnější adrese α znamená rozetnout strom termu t na dva díly hned za listem, jehož adresa je α. Odstraníme to, co je napravo od řezu a utvoříme term z toho, co zbyde nalevo (viz obrázek 4.2). Mějme $t = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot (x_5 \cdot x_6))$. Platí $\mathrm{cut}(t, 000) = x_1$, $\mathrm{cut}(t, 001) = x_1 \cdot x_2$, $\mathrm{cut}(t, 01) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$, $\mathrm{cut}(t, 10) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$, $\mathrm{cut}(t, 110) = ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot (x_4 \cdot x_5)$ a $\mathrm{cut}(t, 111) = t$.

V příkladu jsme nevysvětlili, jak si představit řez ve vnitřní adrese. Tento případ je řešen následujícím lemmatem:

Lemma 4.24 [**12**] *Nechť je t term. Pak pro každou adresu α v kostře termu t platí vztah* $\mathrm{cut}(t, \alpha) = \mathrm{cut}(t, \alpha 1^*)$.

Vidíme snadno, že $s \sqsubseteq t$ implikuje, že s je řez termu t pro dva termy s a t. Na druhou stranu, pokud je s řez termu t, pak platí $s \sqsubseteq_{\square} t$:

Lemma 4.25 [**12**] *Buď t term a α adresa z kostry termu t. Buď s řez* $\mathrm{cut}(t, \alpha)$. *Pak existuje t', LD-expanze termu t, splňující $s \sqsubseteq t'$. Navíc, není-li α finální, pak platí $s \sqsubset t'$.*

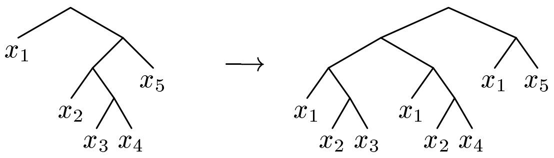
Příklad 4.26 Mějme $t = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$ a adresu 1010. Řez termu t v 1010 je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Platí (viz obrázek 4.3)

$$
\begin{aligned}
t \xrightarrow{\text{LD}} (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4)) \cdot x_1 \cdot x_5 \xrightarrow{\text{LD}} (x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \cdot x_4))) \cdot x_1 \cdot x_5 \\
\xrightarrow{\text{LD}} ((x_1 \cdot x_2 \cdot x_3) \cdot (x_1 \cdot x_2 \cdot x_4)) \cdot x_1 \cdot x_5
\end{aligned}
$$

a vidíme, že $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ je levý podterm posledního termu.

Libovolné řezy termu t nejsou obecně podtermy termu t, ale mohou být vyjádřeny jako součiny podtermů. Popíšeme tuto korespondenci přesněji:

Definice: Pro α adresu je *levá hrana adresy α* konečná posloupnost $(\gamma_1 0, \ldots, \gamma_p 0)$, kde $\gamma_1, \cdots, \gamma_p$ je $\sqsubset$-sestupný výčet předpon γ, které splňují $\gamma 1 \sqsubseteq \alpha$.



Obrázek 4.3: Term $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$ lze nalézt jako levý podterm LD-expanze termu $x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$.

Například levá hrana adresy 010011 je posloupnost $(00, 01000, 010010)$. Vidíme indukcí, že délka levé hrany adresy α je rovna počtu 1 v α. Nyní je řez v α roven součinu podtermů příslušejících levé hraně adresy α. Připomínáme, že chybějící závorky znamenají uzávorkování napravo.

Lemma 4.27 [12] *Nechť je t term a α adresa v kostře termu t. Buď $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ levá hrana adresy α. Pak platí*

$$\mathrm{cut}(t, \alpha) = \mathrm{sub}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{sub}(t, \alpha_p) \cdot \mathrm{sub}(t, \alpha), \tag{4.16}$$

$$\mathrm{cut}(t, \alpha) \overset{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{cut}(t, \alpha_p) \cdot \mathrm{cut}(t, \alpha). \tag{4.17}$$

Následující tvrzení vyjadřuje rozdíl mezi sousedními řezy:

Tvrzení 4.28 [12] *Nechť je t term a α nekoncová adresa obrysu termu t. Označme α^+ bezprostředního následníka adresy α v obrysu termu α a x proměnnou, která se objevuje v t na adrese α^+. Předpokládejme $\mathrm{cut}(t, \alpha) = t_1 \cdot \cdots \cdot t_p$. Pak platí $\mathrm{cut}(t, \alpha^+) = t_1 \cdot \cdots \cdot t_p \cdot x$.*

Nyní se studium řezů v případě identity LD hodně liší od studia řezů v případě LDI, jednoduše proto, že $\sqsubseteq_{\mathrm{LD}}$ je částečné uspořádání. To je důvod, proč už nebudeme uvažovat případ LD, ale pouze případy LDI a LDLI. Od teď používáme symbol $\boxdot$ pro jeden z těchto dvou systémů. Definujeme pro každý term t množinu $\mathrm{Cut}_{\boxdot}(t)$ a dokážeme, že tato množina sestává přesně ze všech řezů termů $\boxdot$-ekvivalentních s t.

Definice: Pro term t, definujeme množiny $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$ a $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$ jako nejmenší množiny termů, které splňují:
- každý řez termu t náleží do $\mathrm{Cut}_{\boxdot}(t)$;
- každý term s' $\boxdot$-ekvivalentní termu s z $\mathrm{Cut}_{\boxdot}(t)$ náleží do $\mathrm{Cut}_{\boxdot}(t)$;
- buďte s, s' dva termy z $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$; pokud existuje term t' v $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$, jehož je s řez v adrese α a s' je řez v adrese α' a pokud platí $\alpha \geqslant \alpha'$, pak term $s \cdot s'$ náleží do $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDI}}(t)$;
- buďte s, s' dva termy z $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$; pokud existuje term t' v $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$, jehož je s řez v nekoncové adrese α a s' je řez v adrese α' a pokud platí $\alpha \geqslant \alpha'$, pak term $s \cdot s'$ náleží do $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$.

Tvrzení 4.29 *Buď t' term ⌑-ekvivalentní termu t. Pak každý řez termu t' náleží do množiny* $\mathrm{Cut}_{⌑}(t)$.

DŮKAZ: Tvrzení dokážeme indukcí podle čísla $d_{⌑}(t,t')$. Pro $t = t'$ je tvrzení evidentní, předpokládejme tedy $d_{⌑}(t,t') = k > 0$. Existuje term t'' splňující $d_{⌑}(t,t'') = k-1$ a $d_{⌑}(t'',t') = 1$. Předpokládejme nejdříve, že je t' základní expanzí termu t'' v adrese γ. Je-li t' základní LD-expanze termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$ podle lemmatu 4.27,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 00\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 10\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 01\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma 10)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 10\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha = \gamma 11\beta.
\end{array}
$$

Je-li t' základní I-expanze termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{I}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{I}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha = \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 0\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 1\beta.
\end{array}
$$

Je-li t' základní LI-expanze termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LI}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LI}}{=} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha = \gamma 1\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 00\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \stackrel{\mathrm{LD}}{=} \mathrm{cut}(t'',\gamma 0)\cdot\mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 01\beta.
\end{array}
$$

Předpokládejme nyní, že term t'' je základní expanzí termu t v adrese γ. je-li t' základní LD-expanze termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LD}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 00\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 0\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 01\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma 10\beta,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{LD}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha = \gamma 11\beta.
\end{array}
$$

Je-li t' základní I-expanzí termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$,

$$
\begin{array}{ll}
\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\mathrm{I}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) & \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 0\beta) & \text{pro } \alpha = \gamma\beta.
\end{array}
$$

Je-li t' základní LI-expanzí termu t'', pak platí pro každé α v $\mathrm{Out}(t)$,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\text{LI}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) && \text{pro } \alpha \perp \gamma,\\
&\mathrm{cut}(t',\alpha) \xrightarrow{\text{LI}} \mathrm{cut}(t'',\alpha) && \text{pro } \alpha = \gamma 1\beta,\\
&\mathrm{cut}(t',\alpha) = \mathrm{cut}(t'',\gamma 00\beta) && \text{pro } \alpha = \gamma 0\beta.
\end{aligned}$$

Uvážili jsme všechny možnosti. Podle indukčního předpokladu všechny řezy termu t'' náleží do $\mathrm{Cut}_{¤}(t'')$. Uvažované řezy $\mathrm{cut}(t',\alpha)$ splňují pravidla definice množiny $\mathrm{Cut}_{¤}(t'')$, a tak patří také do $\mathrm{Cut}_{¤}(t'')$. ■

Tvrzení 4.29 dává nutnou podmínku pro to, aby byl term t' ekvivalentní termu t, příklad předvedeme pro term $x \cdot y$:

Důsledek 4.30 *Definujme váhu $w(t)$ termu t z $T_{x,y}$ následovně:*

$$w(x) = 1, \qquad w(y) = -1, \qquad w(t_1 \cdot t_2) = (w(t_1) + w(t_2))/2 \tag{4.18}$$

Pak každý term t' LDI-ekvivalentní termu $x \cdot y$ splňuje nerovnost $w(\mathrm{cut}(t',\alpha)) \geqslant 0$ pro každé α v $\mathrm{Skel}(t')$.

Důkaz: Podle tvrzení 4.29 stačí dokázat, že platí $w(s) \geqslant 0$ pro každé s z $\mathrm{Cut}_{\text{LDI}}(x \cdot y)$. Ověřme definice množiny $\mathrm{Cut}_{\text{LDI}}(x \cdot y)$: každý řez s z $x \cdot y$ splňuje $w(s) \geqslant 0$; je snadné vidět, že dva LDI-ekvivalentní termy mají stejnou váhu; a pro každý součin $s \cdot s'$ z nerovností $w(s) \geqslant 0$ a $w(s') \geqslant 0$ plyne $w(s \cdot s') \geqslant 0$. Takže každý term s z $\mathrm{Cut}_{\text{LDI}}(x \cdot y)$ splňuje $w(s) \geqslant 0$ a tím je výsledek dokázán. ■

Příklad 4.31 Nechť je $t = x \cdot y$ a $t' = (x \cdot x \cdot y) \cdot (y \cdot x) \cdot y$. Ať vezmeme jakoukoliv váhu w' dostaneme $w'(t) = w'(t')$:

$$\begin{aligned}
w'(t') &= p^2 w'_x + p^2(1-p)w'_x + p(1-p)^2 w'_y + p^2(1-p)w'_y + p(1-p)^2 w'_x + (1-p)^2 w'_y\\
&= p^2 w'_x + p(1-p)w'_x + p(1-p)w'_y + (1-p)^2 w'_y = pw'_x + (1-p)w'_y = w'(t).
\end{aligned}$$

Přesto, řez termu t' v 100 je term $(x \cdot x \cdot y) \cdot y$ a máme $w((x \cdot x \cdot y) \cdot y) = -1/4$. Takže podle důsledku 4.30, term t' není LDI-ekvivalentní termu t.

Důsledek 4.32 *Buď t' ¤-expanze termu t. Buď α adresa z kostry termu t. Pak existuje adresa α' v* $\mathrm{Skel}(t')$ *taková, že* $\mathrm{cut}(t',\alpha')$ *je ¤-expanzí termu* $\mathrm{cut}(t,\alpha)$.

Důkaz: Stačí se podívat na druhou půlku důkazu tvrzení 4.29. Dokazuje se tam, že pokud je term t'' základní ¤-expanzí termu t', pak je $\mathrm{cut}(t'',\alpha)$ ¤-expanzí termu $\mathrm{cut}(t',\alpha')$ pro adresu α'. Zbytek plyne indukcí. ■

Dokázali jsme, že každý řez termu t', který je ¤-ekvivalentní termu t náleží do $\mathrm{Cut}_{¤}(t)$. Nyní dokážeme opačný směr, tj. že každý term $\mathrm{Cut}_{¤}(t)$ je řezem nějakého termu ¤-ekvivalentního termu t.

Lemma 4.33 *Buď s v $\mathrm{Cut}_{¤}(t)$. Pak existuje term t' ¤-ekvivalentní termu t, jehož je s řezem.*

DŮKAZ: Lemma dokážeme indukcí podle délky rozkladu termu s jako součinu řezů z t. Je-li s řez termu t' ¤-ekvivalentní termu t, pak výsledek platí. Předpokládejme $s = s_1 \cdot s_2$ pro s_1 a s_2 dva řezy termu s_3, které splňují indukční předpoklad. Podle tohoto předpokladu existuje term t'' ¤-ekvivalentní termu t, jehož je s_3 řezem. Máme tedy $s_2 \sqsubseteq_{¤} s_1 \sqsubseteq_{¤} s_3 \sqsubseteq_{¤} t'' \overset{¤}{=} t$. Podle lemmatu 4.25 existuje term s_1', LD-expanze termu s_1, takový, že term s_2 je levým podtermem termu s_1'. Podle lemmatu 4.25 existuje term s_3', LD-expanze termu s_3, takový, že term s_1' je levým podtermem termu s_3'. Podle lemmatu 4.25 existuje term t''', LD-expanze termu t'', takový, že term s_3' je levým podtermem termu t'''. Nyní platí $s_2 \sqsubseteq s_1' \sqsubseteq s_3' \sqsubseteq t''' \overset{¤}{=} t$. Označme α adresu podtermu s_1' v t''' a $\alpha\beta$ adresu podtermu s_2 v t'''. Buď nyní t' term, který se dostane základní I-expanzí v adrese α. Platí

$$\mathrm{cut}(t', \alpha 1 \beta) = \mathrm{cut}(t''', \alpha) \cdot \mathrm{cut}(t''', \alpha\beta) = s_1' \cdot s_2 \overset{¤}{=} s_1 \cdot s_2 = s.$$

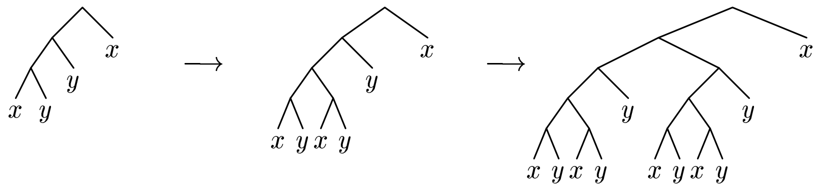
Teď máme evidentně $t' \overset{\mathrm{LDI}}{=} t$, a tak je výsledek dokázán pro ¤=LDI. Uvažujme ¤=LDLI. Podle definice množiny $\mathrm{Cut}_{\mathrm{LDLI}}(t)$ a podle lemmatu 4.25 máme $s_1' \sqsubset t'''$. Pak platí $\alpha = 0^p$ pro nějaké $p > 0$ a víme, že základní I-expanze v adrese 0^p je totéž jako LI-expanze v adrese 0^{p-1}. A tak je term t' LI-ekvivalentní termu t a to končí důkaz. ∎

Tvrzení 4.34 *Následující podmínky jsou ekvivalentní pro dva termy s a t:*
(i) platí $s \sqsubseteq_{¤} t$;
(ii) existuje term t' s $t \overset{¤}{=} t'$, a α, adresa ez $\mathrm{Skel}(t')$ splňující $\mathrm{cut}(t', \alpha) = s$;
(iii) platí $s \in \mathrm{Cut}(t)$;
(iv) platí $\mathrm{Cut}(s) \subseteq \mathrm{Cut}(t)$.

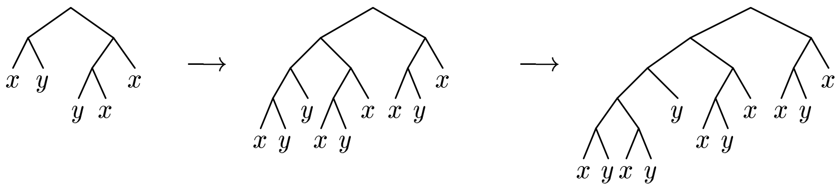
DŮKAZ: (i) ⇒ (ii) Existují termy s' a t'' s $s \overset{¤}{=} s'$, $t \overset{¤}{=} t''$ a $s' \sqsubseteq t'$. Term, který se dostane z termu t' nahrazením podtermu s' termem s je ¤-ekvivalentní termu t. (ii) ⇒ (i) plyne z lemmatu 4.25. (ii) ⇒ (iii) plyne z lemmatu 4.29. (iii) ⇒ (iv) plyne z lemmatu 4.29 a z definice množiny $\mathrm{Cut}(t)$. (iv) ⇒ (iii) je evidentní. ∎

Příklad 4.35 Mějme $t = ((x \cdot y) \cdot y) \cdot x$ a $t' = (x \cdot y) \cdot ((y \cdot x) \cdot x)$. Larue [38] dokázal, že tyto dva termy nejsou LDI-ekvivalentní. Platí $t = \mathrm{cut}(t', 100) \cdot \mathrm{cut}(t', 00)$ a tak podle tvrzení 4.34 platí $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDI}} t'$. Není máme $t \xrightarrow{\mathrm{LDI}} (((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot x$ (viz obrázek 4.4) a dle definice term $(((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)$ náleží do množiny $\mathrm{Cut}(t)$. Teď máme $(((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot x \xrightarrow{\mathrm{LDI}} ((((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot (((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y)) \cdot x$ (viz obrázek 4.4) a dle definice term $((((x \cdot y) \cdot (x \cdot y)) \cdot y) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)) \cdot ((x \cdot y) \cdot x)$ náleží do $\mathrm{Cut}(t)$. Poněvadž je ten poslední term LDI-expanzí termu t' (viz obrázek 4.5), platí $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDI}} t$, podle věty 4.34. Takže vidíme, že nemůžeme dokázat $t \overset{\mathrm{LDI}}{\neq} t'$ srovnáním množin $\mathrm{Cut}(t)$ a $\mathrm{Cut}(t')$.

Uvažujme termy t a t', které se domníváme, že jsou ¤-ekvivalentní. Pokud dokážeme studiem množiny $\mathrm{Cut}(t)$, že neplatí $t' \sqsubseteq_{¤} t$, jako v případě 4.31, víme, že tyto dva termy



Obrázek 4.4: Expanze termu $((x \cdot y) \cdot y) \cdot x$



Obrázek 4.5: Expanze termu $(x \cdot y) \cdot ((y \cdot x) \cdot x)$

nejsou ⌑-ekvivalentní. Pokud naopak dokážeme $t' \sqsubseteq_{⌑} t$ jako v příkladě 4.35, můžeme případně problém vyřešit vyjádřením t-$\partial_{⌑}$-normální formy, která je popsána v následující sekci.

4.4 ∂-normální forma

V této sekci dodáme popis řezů termu $\partial_{⌑} t$ pro term t. Vyvodíme z toho definici t_0-$\partial_{⌑}$-normální formy termu t, pokud term t je, modulo ⌑, iterovaným levým podtermem termu t_0. Jak jméno vypovídá, dva termy t a t' splňující $t \sqsubseteq_{⌑} t_0$ a $t' \sqsubseteq_{⌑} t'_0$ jsou ⌑-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud mají stejnou t_0-$\partial_{⌑}$-normální formu. Už zde neuvažujeme identitu LD a zajímáme se v této sekci pouze o systémy LDI a LDLI. Na začátku sekce předvedeme jisté přípravné výsledky. Začneme tvarem řezů stejnoměrné distribuce.

Lemma 4.36 **[12]** *Nechť jsou t a t_0 dva termy. Obrys termu $t_0 * t$ sestává z:*
- všech adres $\alpha 0 \alpha_0$ s $\alpha_0 \in \mathrm{Out}(t_0)$ a $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$.
- všech adres $\alpha 1$ s $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$.
Předpokládejme $\alpha_0 \in \mathrm{Out}(t_0)$, $\alpha \in \mathrm{Out}(t)$ a $\mathrm{cut}(t, \alpha) = s_1 \cdot \dots \cdot s_p \cdot x$ s x proměnnou. Pak platí

$$\begin{aligned} \mathrm{cut}(t_0 * t, \alpha 0 \alpha_0) &= (t_0 * s_1) \cdot \dots \cdot (t_0 * s_p) \cdot \mathrm{cut}(t_0, \alpha_0), \\ \mathrm{cut}(t_0 * t, \alpha 1) &= t_0 * \mathrm{cut}(t, \alpha). \end{aligned}$$

Definice [12]: Nechť jsou α a β dvě adresy s $\alpha >_{\text{LR}} \beta$. Řekneme, že α ***pokrývá*** β pokud existuje adresa γ a kladné číslo q splňující $\alpha = \gamma 1^q$ a $\gamma 0 \sqsubseteq \beta$. Jinak řekneme, že α ***odkrývá*** β a píšeme $\alpha \gg \beta$.

Například 1011 pokrývá 1001 a 1010 odkrývá 00. Pokrytí a odkrytí jsou částečná uspořádání. Navíc platí $\beta \gg \gamma$, pokud adresa α pokrývá β a odkrývá γ.

Definice: Buď t term a buďte $\alpha_1 >_{\text{LR}} \alpha_2$ dvě adresy z $\mathrm{Out}(t)$. Definujeme $\nu_t^{\mathrm{c}}(\alpha_1, \alpha_2)$ jako počet adres γ z $\mathrm{Out}(t)$ pokrytých adresou α_1 a ostře větších než α_2. Definujeme $\nu_t^{\mathrm{u}}(\alpha_1, \alpha_2)$ jako počet adres γ z $\mathrm{Out}(t)$ splňujících $\alpha_1 \gg \gamma > \alpha_2$. Definujeme $\nu_t(\alpha_1, \alpha_2)$ jako počet adres γ z $\mathrm{Out}(t)$ ostře mezi α_1 a α_2. Při této příležitosti zavedeme dvě virtuální adresy $\leftarrow, \rightarrow$ splňující $\leftarrow \ll \gamma \ll \rightarrow$ pro každé γ z $\mathrm{Out}(t)$.

Vidíme, že platí $\nu_t(\alpha_1, \alpha_2) = \nu_t^{\mathrm{c}}(\alpha_1, \alpha_2) + \nu_t^{\mathrm{u}}(\alpha_1, \alpha_2)$ pro každou dvojici $\alpha_1 >_{\text{LR}} \alpha_2$. Vidíme také, že $\nu_t^{\mathrm{c}}(\alpha_1, \leftarrow)$ je počet adres v $\mathrm{Out}(t)$ pokrytých adresou α_1, že $\nu_t^{\mathrm{u}}(\alpha_1, \leftarrow)$ je počet adres v $\mathrm{Out}(t)$ odkrytých adresou α_1, že $\nu_t^{\mathrm{u}}(\rightarrow, \alpha_2)$ je počet adres v $\mathrm{Out}(t)$ ostře větších než α_2 a že $\nu_t^{\mathrm{c}}(\rightarrow, \alpha_2)$ je rovno 0.

Naším prvním cílem je popsat řezy termu $\partial_\Pi t$ pro každý term t. Začneme systémem LDI a dokážeme, že každý řez termu $\partial_{\text{LDI}} t$ odpovídá posloupnosti, která se nazývá kaskáda.

Definice: Buď t term. *Kaskáda* v t je posloupnost $\vec{\alpha}$ dvojic $((\alpha_1, a_1), \dots, (\alpha_p, a_p))$ taková, že $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ je ostře klesající posloupnost adres z $\mathrm{Out}(t)$, a $a_1, \dots, a_p$ jsou koeficienty 0 nebo 1, pro které z $a_i = 0$ plyne $i = p$ nebo $\alpha_i \gg \alpha_{i+1}$. *Finální* kaskáda termu t je kaskáda $((1^*, 0))$. Píšeme $\mathrm{Casc}(t)$ pro množinu všech kaskád v t.
Definujeme lexikografické uspořádání $<_{\text{lex}}$, pro dvě kaskády $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \dots, (\alpha_p, a_p))$ a $\vec{\beta} = ((\beta_1, b_1), \dots, (\beta_q, b_q))$ následovně:

$$\vec{\alpha} <_{\text{lex}} \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_i < \beta_i \text{ a } \alpha_j = \beta_j \text{ a } a_j = b_j, & \text{pro nějaké } i \leqslant p \text{ a všechna } j < i, \\ \alpha_i = \beta_i \text{ a } a_i > b_i \text{ a } \alpha_j = \beta_j \text{ a } a_j = b_j, & \text{pro nějaké } i \leqslant p \text{ a všechna } j < i, \\ p < q \text{ a } \alpha_j = \beta_j \text{ a } a_j = b_j, & \text{pro všechna } j \leqslant p, \end{cases} \tag{4.19}$$

Příklad 4.37 Buď t term $(x \cdot y) \cdot z$. Všechny kaskády termu t, uspořádané relací $<_{\text{lex}}$, jsou tyto: $((00,1))$, $((00,0))$, $((01,1))$, $((01,1),(00,1))$, $((01,1),(00,0))$, $((01,0))$, $((1,1))$, $((1,1),(00,1))$, $((1,1),(00,0))$, $((1,1),(01,1))$, $((1,1),(01,1),(00,1))$, $((1,1),(01,1),(00,0))$, $((1,1),(01,0))$ a $((1,0))$. Posloupnost $((01,0),(00,1))$ není kaskádou, protože 01 pokrývá 00.

Nyní definujeme zobrazení π_t z $\mathrm{Casc}(t)$ do $\mathbf{A}$. Dokážeme níže, že π_t popisuje bijektivní korespondenci mezi kaskádami termu t a obrysem termu $\partial_{\text{LDI}} t$.

Definice: Buď t term a $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ kaskáda termu t.
(i) Definujeme pro každé $1 \leqslant i < p$,

$$\rho_i(t, \vec{\alpha}) = 2 \cdot (\nu_t^{\mathrm{u}}(\alpha_i, \alpha_{i+1}) + a_i \nu_t^{\mathrm{c}}(\alpha_i, \alpha_{i+1})) + a_{i+1}. \tag{4.20}$$

Rozšíříme definici také pro $i = 0$ a pro $i = p$ položením $\alpha_0 = \rightarrow$, $\alpha_{p+1} = \leftarrow$ a $a_0 = a_{p+1} = 0$.
(ii) Definujeme pro $\vec{\alpha}$ nekoncovou

$$\pi_t(\vec{\alpha}) = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}(10^{\rho_1(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_2(t,\vec{\alpha})}) \cdots (10^{\rho_{p-1}(t,\vec{\alpha})})01^{|\alpha_p|_1+1-a_p}, \tag{4.21}$$

$$\pi_t^+(\vec{\alpha}) = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}(10^{\rho_1(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_2(t,\vec{\alpha})}) \cdots (10^{\rho_{p-1}(t,\vec{\alpha})})(10^{\rho_p(t,\vec{\alpha})}), \tag{4.22}$$

a pro $\vec{\alpha}$ koncovou definujeme $\pi_t(\vec{\alpha}) = 1^{|\alpha_1|+1}$.

Všimněme si, že $\pi_t(\vec{\alpha})$ pro $\vec{\alpha}$ koncovou je vlastně také definováno vzorcem (4.21): platí

$$\pi_t(\vec{\alpha}) = 1^{|\alpha_1|+1} = 0^{-1}01^{|\alpha_1|_1+1-0} = 0^{\rho_0(t,\vec{\alpha})-1}01^{|\alpha_1|_1+1-a_1}.$$

Můžeme konečně popsat tvar řezů termu $\partial_{\mathrm{LDI}} t$.

Tvrzení 4.38 (i) *Pro každý term t je zobrazení π_t monotónní bijekce z množiny* $\mathrm{Casc}(t)$ *uspořádané relací $>_{\mathrm{lex}}$ na množinu* $\mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDI}} t)$ *uspořádanou relací $>_{\mathrm{LR}}$. Pro $\vec{\alpha}$ nekoncovou kaskádu je bezprostřední následník adresy $\pi_t(\vec{\alpha})$ v obryse termu $\partial_{\mathrm{LDI}} t$ adresa $\pi_t^+(\vec{\alpha})$.*
(ii) *Nechť je $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ kaskáda termu t. Pak platí:*

$$\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t, \pi_t(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \mathrm{cut}(t, \alpha_p) \tag{4.23}$$

a pro $\vec{\alpha}$ nekoncovou platí

$$\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t, \pi_t^+(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \mathrm{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \mathrm{cut}(t, \alpha_p) \cdot x \tag{4.24}$$

kde ∂_0 znamená ∂_{LDI}, ∂_1 znamená ∂_{LDLI} a x je proměnná.

DŮKAZ: Nejdříve zavedeme označení: pro $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p)$ kaskádu a γ adresu píšeme $\gamma\vec{\alpha}$ pro $((\gamma\alpha_1, a_1), \ldots, (\gamma\alpha_p, a_p))$. Buď $\vec{\beta} = ((\beta_1, b_1), \ldots, (\beta_q, b_q))$ jiná kaskáda. Označíme $\vec{\alpha}\frown\vec{\beta}$ spojenou posloupnost $((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p), (\beta_1, b_1), \ldots (\beta_q, b_q))$. Je evidentní, že je $\gamma\vec{\alpha}$ kaskáda a že $\vec{\alpha}\frown\vec{\beta}$ je kaskáda tehdy a jen tehdy, pokud platí buďto $a_p = 1$ a $\alpha_p > \beta_1$, anebo $a_p = 0$ a $\alpha_p \gg \beta_1$.

Tvrzení dokážeme indukcí podle t. Když je t proměnná, máme jen dvě kaskády v t, a to $((\varnothing), (1))$ a $((\varnothing), (0))$. Zobrazení π_t je posílá na 0 a 1 postupně, což jsou obě vnější adresy termu $\partial_{\mathrm{LDI}} t$. Takže tvrzení platí. Předpokládejme $t = t_1 \cdot t_2$. Dle definice jsou kaskády termu t třech typů:
- $1\vec{\gamma}\frown 0\vec{\beta}$, s $\vec{\beta}$ kaskádou termu t_1 a $\vec{\gamma}$ nekoncovou kaskádou termu t_2;
- $1\vec{\gamma}$, s $\vec{\gamma}$ kaskádou termu t_2;
- $0\vec{\beta}$, s $\vec{\beta}$ kaskádou termu t_1.

Nechť je nejdřív $\vec{\beta}$ nekoncová kaskáda termu t_1 a $\vec{\gamma}$ nekoncová kaskáda termu t_2. Pro každé α_2 v $\mathrm{Out}(t_2)$ a α_1 v $\mathrm{Out}(t_1)$ platí

$$\nu^{\mathrm{u}}_t(1\alpha_2, 0\alpha_1) = \nu^{\mathrm{u}}_{t_2}(\alpha_2, \leftarrow) + \nu^{\mathrm{u}}_{t_1}(\rightarrow, \alpha_1),$$
$$\nu^{\mathrm{c}}_t(1\alpha_2, 0\alpha_1) = \nu^{\mathrm{c}}_{t_2}(\alpha_2, \leftarrow) = \nu^{\mathrm{c}}_{t_2}(\alpha_2, \leftarrow) + \nu^{\mathrm{c}}_{t_1}(\rightarrow, \alpha_1),$$

což bude platit i pro $\alpha_2 = \rightarrow$ nebo $\alpha_1 = \leftarrow$. Použitím definice zobrazení π_t dostaneme

$$\pi_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}) = \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta}), \qquad \pi^+_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}) = \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi^+_{t_1}(\vec{\beta}),$$

kde druhá rovnost platí pouze pro $\vec{\beta}$ nekoncovou. S podobným označením dostaneme

$$\pi_t(1\vec{\gamma}) = \pi_{t_2}(\vec{\gamma})1, \qquad \pi^+_t(1\vec{\gamma}) = \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0^{2m_1},$$
$$\pi_t(0\vec{\beta}) = 0^{2m_2}\pi_{t_1}(\vec{\beta}), \qquad \pi^+_t(0\vec{\beta}) = 0^{2m_2}\pi^+_{t_1}(\vec{\beta}),$$

kde m_e značí $\nu_{t_e}(\leftarrow, \rightarrow)$.

Buď nyní $((1^q), (0))$ koncová kaskáda termu t_1. Pak pro každou $\vec{\gamma}$, nekoncovou kaskádu termu t_2, dostaneme

$$\pi^+_t(1\vec{\gamma}^\frown((01^q), (0))) = \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})1, \qquad \pi^+_t(((01^q), (0))) = 0^{2m_2-1}1,$$
$$\pi_t((01^q), (0)) = 0^{2m_2}1^{q+1} = 0^{2m_2}\pi_{t_1}(((1^q), (0))).$$

Nakonec buď $((1^q), (0))$ koncová kaskáda termu t_2. Pak je $((1^{q+1}), (0))$ koncová kaskáda termu t a platí

$$\pi_t(((1^{q+1}), (0))) = 1^{q+2} = \pi_{t_2}(((1^q), (0)))1.$$

Vyvodíme z toho, že obraz zobrazení π_t sestává ze všech posloupností $\pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta})$ pro $\vec{\beta}$ kaskádu termu t_1 a $\vec{\gamma}$ nekoncovou kaskádu termu t_2, doplněnou všemi posloupnostmi $\pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})1$ s $\vec{\gamma}$ nekoncovou kaskádou termu t_2 a všemi posloupnostmi $0^{2m_2}\pi_t(\vec{\beta})$ s $\vec{\beta}$ kaskádou termu t_1. Indukční předpoklad říká, že množina všech posloupností tvaru $\pi^+_{t_2}$ s $\vec{\gamma}$ nekoncovou kaskádou je obrys termu $\partial_{\mathrm{LDI}}t_2$ bez adresy 0^*, a že množina posloupností ve tvaru $\pi_{t_1}(\vec{\beta})$ s $\vec{\beta}$ kaskádou termu t_1 tvoří obrys termu $\partial_{\mathrm{LDI}}t_1$. Takže podle lemmatu 4.36 je obraz π_t obrysu termu $\partial_{\mathrm{LDI}}t_1 * \partial_{\mathrm{LDI}}t_2$, což je $\partial_{\mathrm{LDI}}t$. Podobný argument dokáže, že obraz zobrazení π^+_t je obrys termu $\partial_{\mathrm{LDI}}t$ bez adresy 0^*.

Podle definice platí $\pi_t(\vec{\alpha}) < \pi^+_t(\vec{\alpha})$ pro každou nekoncovou adresu termu t. Navíc $\pi_t(\vec{\alpha})$ a $\pi^+_t(\vec{\alpha})$ mají tvar $\gamma 01^*$ a $\gamma 10^*$ postupně. Takže žádná adresa β nemůže splňovat $\pi_t(\vec{\alpha}) < \beta < \pi^+_t(\vec{\alpha})$. To dokazuje, že $\pi^+_t(\vec{\alpha})$ je bezprostřední následník adresy $\pi_t(\vec{\alpha})$ v obryse termu $\partial_{\mathrm{LDI}}t$.

Nakonec platí následující vztahy podle indukce:
- $\pi_t(0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}) < \pi_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta})$ pro $\vec{\beta}$ kaskádu termu t_1 a $\vec{\gamma}$ kaskádu termu t_2;
- $\pi_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}'^\frown 0\vec{\beta}')$ pro $\vec{\beta}, \vec{\beta}'$ kaskády termu t_1 a $\vec{\gamma} <_{\mathrm{lex}} \vec{\gamma}'$ kaskády termu t_2;
- $\pi_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}) < \pi_t(1\vec{\gamma}^\frown 0\vec{\beta}')$ pro $\vec{\beta} <_{\mathrm{lex}} \vec{\beta}'$ kaskády termu t_1 a $\vec{\gamma}$ kaskádu termu t_2.

Zobrazení π_t je tedy rostoucí, poněvadž dle indukčního předpokladu jsou zobrazení π_{t_1} a π_{t_2} rostoucí. To ukončuje důkaz bodu (i).

(*ii*) Nechť jsou nyní $\vec{\beta}$ kaskáda termu t_1 a $\vec{\gamma}$ kaskáda termu t_2, označme kaskády $\vec{\beta} = ((\beta_1, \ldots, \beta_q), (b_1, \ldots, b_q))$ a $\vec{\gamma} = ((\gamma_1, \ldots, \gamma_r), (c_1, \ldots, c_r))$. Pak $\pi_t(1\vec{\gamma}{}^\frown 0\vec{\beta})$, což je $\pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta})$, náleží do obrysu termu $\partial_{\text{LDI}}t$. Lemma 4.36 dává

$$\begin{aligned}\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma}{}^\frown 0\vec{\beta})) &= \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})0\pi_{t_1}(\vec{\beta}))\\ &= (\partial_{\text{LDI}}t_1 * s_1) \cdot \cdots \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * s_m) \cdot \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1, \pi_t(\vec{\beta})),\end{aligned}$$

kde $\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_t(\vec{\gamma}))$ má být roven $s_1 \cdot \cdots \cdot s_m \cdot x$ pro nějakou proměnnou x. Dle indukčního předpokladu platí $m = r$ a $s_k = \partial_{c_k} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$ pro $k \leqslant r$. Použijeme $\operatorname{cut}(t, 1\gamma_k) = t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$ a $\partial_{c_k} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_k) = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_k} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_k)$ a nalezneme

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma}{}^\frown 0\vec{\beta})) = \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_r) \cdot \partial_{b_1} \operatorname{cut}(t, 0\beta_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{b_q} \operatorname{cut}(t, 0\beta_q),$$

což je vzorec (4.23). Případ kaskády $0\vec{\beta}$ samotné je podobný.

Uvažujme nyní případ $1\vec{\gamma}$, kde $\vec{\gamma} = ((\gamma_1, \ldots, \gamma_r), (c_1, \ldots, c_r))$ je kaskáda termu t_2. Pak platí $\pi_t(1\vec{\gamma}) = \pi_t(\vec{\gamma})1$ a podle lemmatu 4.36,

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma})) = \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})1) = \partial_{\text{LDI}}t_1 * \operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})).$$

Podle indukčního předpokladu platí $\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t_2, \pi^+_{t_2}(\vec{\gamma})) = \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r)$, a tak dostaneme

$$\begin{aligned}\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDI}}t, \pi_t(1\vec{\gamma})) &= \partial_{\text{LDI}}t_1 * (\partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r))\\ &= (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1)) \cdot \cdots \cdot (\partial_{\text{LDI}}t_1 * \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r))\\ &= (\partial_{c_1}(t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_1))) \cdot \cdots \cdot (\partial_{c_r}(t_1 \cdot \operatorname{cut}(t_2, \gamma_r)))\\ &= \partial_{c_1} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_1)) \cdot \cdots \cdot \partial_{c_r} \operatorname{cut}(t, 1\gamma_r)),\end{aligned}$$

což dává znovu vzorec (4.23).

Jelikož je $\pi^+_t(\vec{\alpha})$ následník adresy $\pi_t(\vec{\alpha})$ v obryse termu $\partial_{\text{LDI}}t$, vzorec (4.24) dostaneme použitím tvrzení 4.28. ∎

Tento výsledek o řezech termu $\partial_{\text{LDI}}t$ nám umožňuje okamžitě formulovat podobný výsledek pro $\partial_{\text{LDLI}}t$.

Definice: Buď t term a buď $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ kaskáda termu t. Řekneme, že $\vec{\alpha}$ je *menší* kaskáda termu t, pokud platí $\vec{\alpha} \leqslant_{\text{lex}} ((1^*, 1))$. Množina všech menších kaskád termu t se značí $\operatorname{casc}(t)$.

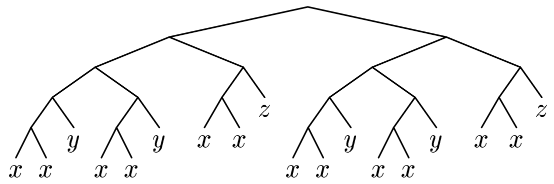
Tvrzení 4.39 (*i*) *Pro každý term t je zobrazení π_t monotónní bijekcí z množiny* $\operatorname{casc}(t)$ *uspořádané relací $>_{\text{lex}}$ na množinu* $\operatorname{Out}(\partial_{\text{LDLI}}t)$ *uspořádanou relací $>_{\text{LR}}$.*
(*ii*) *Nechť je $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ menší kaskáda termu t. Pak platí:*

$$\operatorname{cut}(\partial_{\text{LDLI}}t, \pi_t(\vec{\alpha})) = \partial_{a_1} \operatorname{cut}(t, \alpha_1) \cdot \cdots \cdot \partial_{a_p} \operatorname{cut}(t, \alpha_p),$$

kde ∂_0 značí ∂_{LDI} a ∂_1 značí ∂_{LDLI}.

DŮKAZ: Platí $\partial_{\mathrm{LDI}}t = \partial_{\mathrm{LDLI}}t \cdot \partial_{\mathrm{LDLI}}t$, podle lemmatu 4.6. Takže, pokud vezmeme adresu α z $\mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDLI}}t)$, adresa 0α náleží do $\mathrm{Out}(\partial_{\mathrm{LDI}}t)$ a platí $\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDLI}}t, \alpha) = \mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}}t, 0\alpha)$. Pro kaskádu $\vec{\alpha}$ termu t adresa $\pi_t(\vec{\alpha})$ začíná číslem 0 tehdy a jen tehdy, je-li α menší. Zbytek plyne z tvrzení 4.38. ∎

Příklad 4.40 Nechť je $t = x \cdot (y \cdot z)$. Term $\partial_{\mathrm{LDI}}t$ je nakreslen na obrázku 4.6. Uvažujme například kaskádu $\vec{\alpha} = ((01,0),(0,1))$. Platí $\pi_t(\vec{\alpha}) = 0100$ a řez $\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}}t, \pi_t(\vec{\alpha}))$ je $\partial_{\mathrm{LDI}}(x \cdot y) \cdot \partial_{\mathrm{LDLI}}(x)$. Uvažujme nyní kaskádu $\vec{\beta} = ((1,1),(01,0))$. Máme $\pi_t(\vec{\beta}) = 1011$ a řez $\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}}t, \pi_t(\vec{\beta}))$ je $\partial_{\mathrm{LDLI}}t \cdot \partial_{\mathrm{LDI}}(x \cdot y)$.



Obrázek 4.6: Term $\partial_{\mathrm{LDI}}x \cdot (y \cdot z)$.

Lemma 4.41 *Pro každý term t a každé k platí $\partial^k_{\mathrm{LDLI}}t \sqsubseteq \partial^k_{\mathrm{LDI}}t$.*

DŮKAZ: Důkaz provedeme indukcí podle k. Výsledek je triviální pro $k = 0$. Předpokládejme $k > 0$. Podle indukčního předpokladu existuje l takové, že platí $\partial^{k-1}_{\mathrm{LDLI}}t = \mathrm{sub}(\partial^{k-1}_{\mathrm{LDI}}t, 0^l)$. Takže máme $\partial^{k-1}_{\mathrm{LDLI}}t = \mathrm{cut}(\partial^{k-1}_{\mathrm{LDI}}t, 0^l 1^*)$. Platí $\pi_{\partial^{k-1}_{\mathrm{LDI}}t}((0^l 1^*, 1)) = 0^{l'} 1^*$ pro nějaké l'. Takže dostaneme $\mathrm{cut}(\partial^k_{\mathrm{LDI}}t, 0^{l'} 1^*) = \partial_{\mathrm{LDLI}}\,\mathrm{cut}(\partial^{k-1}_{\mathrm{LDI}}t, 0^l 1^*) = \partial^k_{\mathrm{LDLI}}t$ a term $\partial^k_{\mathrm{LDLI}}t$ je iterovaným levým podtermem termu $\partial^k_{\mathrm{LDI}}t$. ∎

Nyní, když umíme vyjádřit řezy termu $\partial_\sharp t$ v závislosti na řezech termu t, můžeme definovat t_0-$\partial_\sharp$-normální formu:

Definice: Buď t_0 term. Pro $k \geqslant 0$ řekneme, že term t je t_0-$\partial_\sharp$*-normální term stupně k*, pokud je t řezem termu $\partial^k_\sharp t_0$ v adrese α a žádný řez termu $\partial^k_\sharp t_0$ v adrese $\beta <_{\mathrm{LR}} \alpha$ není $\sharp$-ekvivalentní termu t. Navíc, pro $k > 0$, vyžadujeme, aby žádný řez termu $\partial^{k-1}_\sharp t$ nebyl $\sharp$-ekvivalentní termu t.

Příklad 4.42 Buď $t_0 = x \cdot (y \cdot z)$. Termy t_0-∂_{LDI}-normální stupně 0 jsou x, $x \cdot y$ a $x \cdot (y \cdot z)$. Termy t_0-∂_{LDI}-normální stupně 1 jsou $((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$, $\partial_{\mathrm{LDLI}}t_0 \cdot x$, $\partial_{\mathrm{LDLI}}t_0 \cdot (x \cdot x) \cdot y$ a $\partial_{\mathrm{LDLI}}t_0 \cdot ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$.

Okamžitě dostaneme jednoznačnost ∂-normální formy:

Tvrzení 4.43 *Buď t_0 term. Pak každý term t s $t \sqsubseteq_\sharp t_0$ je $\sharp$-ekvivalentní jedinému t_0-$\partial_\sharp$-normálnímu termu.*

Důkaz: Podle tvrzení 4.34 existuje term t_0', ¤-ekvivalentní termu t_0, takový, že t je řezem termu t_0'. Podle tvrzení 4.12 existuje k takové, že term $\partial_{¤}^k t_0$ je expanzí termu t_0'. Pak, podle důsledku 4.32 existuje řez termu $\partial_{¤}^k t_0$, který je ¤-ekvivalentní termu t. Takže t_0-$\partial_{¤}$-normální term, který je ¤-ekvivalentní termu t_0, existuje a jeho jednoznačnost je evidentní. ∎

V případě nejsou LD žádné dva z řezů termu $\partial_{\mathrm{LD}} t$ pro nějaké t LD-ekvivalentní, což není pravdou v případě LDI: Mějme $\vec{\alpha} = ((\alpha_1, a_1), \ldots, (\alpha_p, a_p))$ a $\vec{\alpha}' = ((\alpha_1, a_1'), \ldots, (\alpha_p, a_p'))$ kaskády termu t_0; tyto kaskády se liší pouze koeficienty. Řez termu $\partial_{\mathrm{LDI}} t_0$ v $\pi(\vec{\alpha})$ je LDI-ekvivalentní řezu v adrese $\pi(\vec{\alpha}')$. Takže podmínka na minimalitu adresy řezu v definici t_0-$\partial_{¤}$-normálního termu je nutná. Bohužel můžeme také dostat LDI-ekvivalentní řezy z kaskád, jejichž posloupnosti adres nejsou rovny: buď $t_0 = (x \cdot y) \cdot x$ a buďte $\vec{\alpha} = ((01, 1), (00, 1))$ a $\vec{\beta} = ((1, 1))$. Pak platí $\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t_0, \pi(\vec{\alpha})) = ((x \cdot x) \cdot y) \cdot x$ a tento řez je LDLI-ekvivalentní termu t_0, a tak také řezu $\mathrm{cut}(\partial_{\mathrm{LDI}} t_0, \pi(\vec{\beta}))$. Nemůžeme tedy říci, že ¤-ekvivalentní řezy mají stejný původ. Nicméně je přesto možné, že ¤-ekvivalentní řezy termu $\partial_{¤}^k t_0$ mají něco společného:

Domněnka 4.44 *Buď t_0 term a k přirozené číslo. Pak je každý řez t termu $\partial_{¤}^k t_0$ ¤-expanzí t_0-$\partial_{¤}$-normálního termu, který je ¤-ekvivalentní termu t.*

Tvrzení 4.43 říká, že každý term t splňující $t \sqsubseteq_{¤} t_0$ je ekvivalentní t_0-$\partial_{¤}$-normálnímu termu. Ale toto tvrzení není efektivní v tom smyslu, že neříká, jak nalézt hledaný t_0-$\partial_{¤}$-normální term. Jistý způsob přesto existuje, platí-li domněnka 4.44:

Tvrzení 4.45 *Buďte t a t_0 dva termy splňující $t \sqsubseteq_{¤} t_0$. Je-li domněnka 4.44 správná, pak existuje algoritmus, který nalezne t_0-$\partial_{¤}$-normální term ¤-ekvivalentní termu t.*

Důkaz: Podle toho, co jsme řekli v důkaze tvrzení 4.43, existuje k takové, že řez $\partial_{¤}^k t_0$ je ¤-expanzí termu t. Umíme rozhodnout, zda je term t' ¤-expanzí termu t. Takže projdeme všechna k a všechny řezy termů $\partial_{¤}^k t_0$ až do chvíle, než nalezneme k a řez t' termu $\partial_{¤}^k t_0$, který je ¤-expanzí termu t. Nyní je term t' kandidát na t_0-$\partial_{¤}$-normalitu.

Buď t' řez mocniny $\partial_{¤}^k t_0$ v adrese α, který je kandidátem na t_0-$\partial_{¤}$-normalitu. Podle domněnky 4.44 stačí prověřit, že všechny řezy termu $\partial_{¤}^k t_0$ v adresách β s $\alpha >_{\mathrm{LR}} \beta$ stejně jako všechny řezy termů $\partial_{¤}^l t_0$ s $l < k$ nemohou být ¤-expandovány do termu t'. Pokud je tomu tak, pak term t' je t_0-$\partial_{¤}$-normální. Pokud nalezneme term t'' s $t'' \xrightarrow{¤} t'$, pak je term t'' novým kandidátem na t_0-$\partial_{¤}$-normalitu. Jelikož je třeba prověřit pouze konečné množství řezů, algoritmus musí najít t_0-$\partial_{¤}$-normální term, který je ¤-ekvivalentní termu t. ∎

Pokud dva termy t a t' splňují $t \sqsubseteq_{\Box} t_0$ a $t' \sqsubseteq_{\Box} t_0$, pro nějaký term t_0, pak mají stejnou normální formu. Pokud je domněnka 4.44 pravdivá, pak můžeme tyto normální formy najít algoritmem. Důležité je tedy umět nalézt takový prvek t_0 a umět dokázat $t' \sqsubseteq_{\Box} t_0$. První otázka není tak složitá můžeme vzít například $t_0 = t$ a okamžitě dostaneme $t \sqsubseteq_{\Box} t_0$. Na to, abychom dokázali druhou otázku, může pomoci tvrzení 4.34, tak jako v příkladě 4.35, ale obecný algoritmus není dosud znám.

Kapitola 5

Geometrické monoidy

V této sekci studujeme geometrické monoidy, přístup, který umožnil vyřešit problém slov v případě LD (viz [12]). Identitám levé distributivity a idempotence jsou zde přidruženy operátory, které určují, která z identit se aplikuje a na kterém podtermu. Tyto operátory se mohou přirozeně skládat a dostane se monoid zvaný geometrický monoid. Studujeme zde geometrické monoidy pro LDI a pro LDLI a popíšeme jisté relace, které platí v těchto monoidech. Poté definujeme syntaktické monoidy jako monoidy, které splňují základní relace geometrických monoidů. Dokážeme, že tyto monoidy splňují všechny vlastnosti geometrických monoidů a navíc, že syntaktický monoid LDLI je s levým krácením a že jeho uspořádání levou dělitelností tvoří svaz.

V sekci 1 definujeme LDI-operátory a předvedeme jisté základní výsledky, týkající se těchto operátorů. V sekci 2 odvodíme seznam relací platných v geometrických monoidech LDI a LDLI. Tyto výsledky se použijí v sekci 3 pro definování syntaktických monoidů a důkaz jejich vlastností. V sekci 4 studujeme syntaktický monoid LDLI.

5.1 LDI-operátory

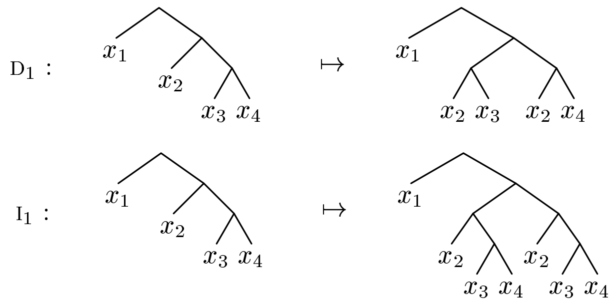
V této sekci zavedeme operátory, které odpovídají postupným aplikacím identit LD a I. Poté přineseme přípravné výsledky týkající se monoidů generovaných těmito operátory. Sledujeme metodu použitou v [12] pro LD-operátory.

Připomínáme, že T_X vyznačuje množinu všech termů s proměnnými v X. Definujeme nejdříve operátory odpovídající základním expanzím.

Definice: Pro každou množinu X a každou adresu α, definujeme $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ (respektive $\mathrm{I}_{\alpha,X}$) jako částečnou funkci z T_X do T_X, která posílá každý term t na jeho základní LD-expanzi (jeho základní I-expanzi) v adrese α, pokud ona existuje.

Operátor $\mathrm{I}_{\alpha,X}$ má akci na termu t tehdy a jen tehdy, pokud α náleží do kostry termu t; v tom případě se term $t \bullet \mathrm{I}_{\alpha,X}$ dostane z t nahrazením podtermu $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ termem $\mathrm{sub}(t,\alpha) \cdot \mathrm{sub}(t,\alpha)$. Operátor $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ má akci na termu t tehdy a jen tehdy, pokud je podterm $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ definován a je ve tvaru $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$. V tom případě se term $t \bullet \mathrm{D}_{\alpha,X}$ dostane z t nahrazením podtermu $\mathrm{sub}(t,\alpha)$ termem $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)$. Pokud je množina X podmnožinou množiny X', pak je každý operátor $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ restrikcí operátoru $\mathrm{D}_{\alpha,X'}$ na množinu T_X. Vidíme tedy, že pro term t jeho obraz operátorem $\mathrm{D}_{\alpha,X}$ nezáleží na množině X a to je důvod, proč nebudeme psát index X tam, kde nehraje žádnou roli.

Příklad 5.1 Uvažujme $t = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ (viz obrázek 5.1). Tento term náleží do definičního oboru operátorů $\mathrm{D}_\varnothing$, D_1, $\mathrm{I}_\varnothing$, I_0, I_1, I_{10}, I_{11}, I_{110} a I_{111}.



Obrázek 5.1: Operátory D_1 a I_1 a jejich akce na termu $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$.

Nedefinovali jsme zde, co to je LI-operátor. Ve skutečnosti jej není třeba, pokud si všimneme, že základní LI-expanze v adrese α je základní I-expanzí v adrese $\alpha 0$.

Definice: Buďte $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$ a $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ dvě disjunktní kopie množiny adres $\mathbf{A}$. Označíme $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$ množinu $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}} \cup \mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ a, pro každé α v $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$, definujeme DI_α buďto jako D_α, pokud α náleží do $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$, anebo jako I_α, pokud α náleží do $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$. Označíme též $\mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$ podmnožinu množiny $\mathbf{A}_{\mathrm{I}}$ definovanou jako $\{\alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}};\ \exists\gamma : \alpha = \gamma 0\}$ a označíme $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}$ množinu $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}} \cup \mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$.

Následující lemma plyne okamžitě z definice operátorů:

Lemma 5.2 *Pro každou adresu α z $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$ je operátor DI_α částečné prosté zobrazení do T_X; jeho inverzem je operátor DI_α^{-1} definovaný jako DI_α se zaměněnými rolemi termů $t_1(t_2 \cdot t_3)$ a $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_3)$, respektive t_1 a $t_1 \cdot t_1$.*

Používáme znovu symbol $\boxtimes$ pro označení systémů identit LD, LDI nebo LDLI.

Definice: Pro X neprázdnou množinu je *geometrický monoid* ¤ příslušný množině X definován jako monoid $\mathcal{G}_{¤,X}$ generovaný operátory $\textsc{di}^{\pm 1}_{\alpha,X}$ s α v $\mathbf{A}_{¤}$ a jejich skládáním. Analogicky definujeme *kladný geometrický monoid* jako monoid $\mathcal{G}^{+}_{¤,X}$ generovaný operátory $\textsc{di}_{\alpha,X}$ s α v $\mathbf{A}_{¤}$.

Monoid $\mathcal{G}_{¤,X}$ není grupou, protože zobrazení $\textsc{di}^{-1}_{\alpha,X} \circ \textsc{di}_{\alpha,X}$ není obecně identickým zobrazením na T_X, je pouze identitou na definičním oboru operátoru $\textsc{di}_{\alpha,X}$.

Bijekce mezi X a X' generuje izomorfismus mezi monoidy $\mathcal{G}_{¤,X}$ a $\mathcal{G}_{¤,X'}$, a tak monoid $\mathcal{G}_{¤,X}$ odvisí pouze od mohutnosti množiny X. Lze dokázat, že $\mathcal{G}_{¤,X}$ neodvisí ani od mohutnosti množiny X, ale to zde nebudeme dělat, neboť důkaz tohoto je úplně stejný jako obdobný důkaz pro geometrický monoid LD v [12]. S vědomím tohoto už nebudeme používat indexy X v $\textsc{di}_{\alpha}$, $\mathcal{G}_{¤}$ a $\mathcal{G}^{+}_{¤}$.

Dle definice jsou prvky monoidu $\mathcal{G}^{+}_{¤}$ konečné součiny operátorů $\textsc{di}_{\alpha}$, takže jsou ve tvaru

$$\textsc{di}_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \textsc{di}_{\alpha_2} \circ \textsc{di}_{\alpha_1} .$$

Takovéto prvky se dají vyjádřit jako konečné posloupnosti adres z $\mathbf{A}_{¤}$, tj. pomocí slov na $\mathbf{A}_{¤}$. Označíme $\mathbf{A}^{*}_{¤}$ množinu těchto slov. Součin dvou slov u a v je konkatenace těchto slov, značená uv nebo $u \cdot v$. Poněvadž budeme pracovat se slovy nad množinou adres, je nutné psát tečku, abychom se vyhnuli nejednoznačnosti: posloupnost $0 \cdot 10 \cdot \varnothing$ je slovo délky 3 na $\mathbf{A}^{*}$. Píšeme symbol ε pro prázdné slovo.

Předpokládáme, že operátory $\textsc{di}_{\alpha}$ mají akci napravo, tj. že se operátory skládají zleva napravo. Takže, abychom nezaměňovali skládání napravo se skládáním $\circ$, jehož směr je zprava nalevo, používáme symbol $\bullet$.

Definice: Pro $\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_p$ z $\mathbf{A}^{*}_{¤}$, je operátor $\textsc{di}_u$ definován jako $\textsc{di}_{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \textsc{di}_{\alpha_p}$, tj. jako $\textsc{di}_{\alpha_p} \circ \cdots \circ \textsc{di}_{\alpha_1}$. Operátor $\textsc{di}_{\varepsilon}$ je definován jako identita.

Uvažujme nyní monoid $\mathcal{G}_{¤}$. Jeho prvky jsou ve tvaru

$$\textsc{di}^{e1}_{\alpha_1} \bullet \textsc{di}^{e_2}_{\alpha_2} \bullet \cdots \bullet \textsc{di}^{e_p}_{\alpha_p}$$

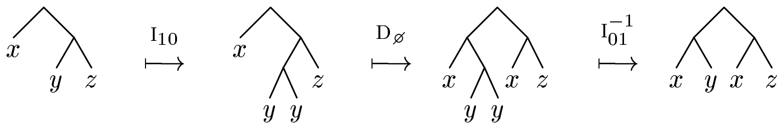
s α_i v $\mathbf{A}_{¤}$ a $e_i = \pm 1$, pro i mezi 1 a p. Abychom zapsali takovýto součin, je přirozené zavést formální inverz α^{-1} adresy α z $\mathbf{A}_{¤}$. Označíme $\mathbf{A}^{-1}_{¤}$ množinu formálních inverzů adres z $\mathbf{A}_{¤}$, a $\mathbf{A}^{\pm 1}_{¤}$ množinu $\mathbf{A}_{¤} \cup \mathbf{A}^{-1}_{¤}$.

Definice: Pro $w = \alpha_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_p^{e_p}$ v $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{¤})^{*}$, je operátor $\textsc{di}_w$ definován jako součin $\textsc{di}^{e_1}_{\alpha_1} \bullet \cdots \bullet \textsc{di}^{e_p}_{\alpha_p}$.

Prvky monoidu $\mathbf{A}^{*}_{¤}$ se nazývají kladná slova a prvky monoidu $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{¤})^{*}$ se nazývají prostě slova.

Definice: Pro term t a slovo w z $(\mathbf{A}^{\pm 1}_{¤})^{*}$, je term $t \bullet w$ definován jako obraz termu t při zobrazení $\textsc{di}_w$, pokud existuje.

Příklad 5.3 Uvažujme $\mathrm{DI}_w = \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{01}^{-1}$. Je snadné nahlédnout, že term $x \cdot y \cdot z$ náleží do definičního oboru operátoru DI_w a že obraz termu $x \cdot y \cdot z$ při DI_w je term $(x \cdot y) \cdot x \cdot z$, jak vidíme na obrázku 5.2.



Obrázek 5.2: Akce operátoru $\mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{01}^{-1}$ na termu $x \cdot y \cdot z$.

Dle definice máme vztah $t \bullet w \overset{¤}{=} t$ pro každé slovo w z $(\mathbf{A}_{¤}^{\pm 1})^*$, pokud t náleží do definičního oboru termu DI_w. Platí též vztah $t \bullet u \overset{¤}{\to} t$ pro každé kladné slovo u z $\mathbf{A}_{¤}^*$, pokud t náleží do definičního oboru termu DI_u. Obě tyto implikace jsou vlastně ekvivalencemi:

Tvrzení 5.4 *Buďte t a t' dva termy z T_X.*
(i) Termy t a t' jsou ¤-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud nějaký operátor z $\mathcal{G}_{¤}$ posílá t na t', tzn. pokud platí $t' = t \bullet w$ pro nějaké slovo w na $\mathbf{A}_{¤}^{\pm 1}$.
(ii) Term t je ¤-expanzí termu t tehdy a jen tehdy, pokud nějaký operátor z $\mathcal{G}_{¤}^{+}$ posílá t na t', tzn. pokud platí $t' = t \bullet u$ pro nějaké slovo u na $\mathbf{A}_{¤}$.

DŮKAZ: Dle definice základní odpovídají ¤-expanze akci operátorů DI_{α} s α v $\mathbf{A}_{¤}$. Provést k-¤-expanzi znamená provést k po sobě jsoucích základních ¤-expanzí a tyto odpovídají slovům délky k na $\mathbf{A}_{¤}$. Stejně tak jsou dva termy t a t' ¤-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud existuje posloupnost $t = t_0, \ldots, t_k = t'$ termů taková, že dva sousední termy jsou základní ¤-expanze jeden druhého. Tato posloupnost odpovídá slovu w délky k na $\mathbf{A}_{¤}^{\pm 1}$ a operátor DI_w posílá t na t'. ■

Podle tvrzení 5.4 je studium relace $\overset{¤}{=}$ na T_X ekvivalentní studiu monoidu $\mathcal{G}_{¤,X}$ a studium relace $\overset{\mathrm{I}}{\to}$ na T_X je ekvivalentní studiu monoidu $\mathcal{G}_{¤,X}^{+}$. Výhoda monoidového přístupu je, že umožňuje přesnější analýzu.

V dalším textu popíšeme definiční obor operátorů. Tyto výsledky se použijí v druhé sekci pro důkaz relací v geometrických monoidech. Nedodáme přesné důkazy těchto výsledků, neboť jsou stejné jako důkazy analogických tvrzení v [12].

Definice: Řekneme, že term t z $T_{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}}$ je *kanonický,* pokud proměnné termu t, uspořádané podle jejich prvního výskytu vlevo, jsou $x_1, x_2, \ldots$. Řekneme, že term t je *lineární,* pokud se žádná proměnná neobjevuje dvakrát v t. Řekneme, že je substituce *lineární,* pokud je pro každou proměnnou z term $h(z)$ lineární a navíc proměnné, které se objeví v $h(z)$ jsou disjunktní s těmi, které se objeví v $h(y)$ pro $y \neq z$.

Vidíme, že pro každý term t, existuje právě jeden lineární kanonický term, který má stejnou kostru jako t.

Definice: Buď (s, s') dvojice termů z T_X. Pro každou substituci h řekneme, že dvojice (s^h, s'^h) je *instancí* dvojice (s, s').

Lemma 5.5 *Pro každou adresu α z $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ existuje dvojice (t^L_α, t^R_α) kanonických termů z T_X takových, že operátor DI_α posílá t na t' tehdy a jen tehdy, když je dvojice (t, t') instancí dvojice (t^L_α, t^R_α). Navíc je term t^L_α lineární.*

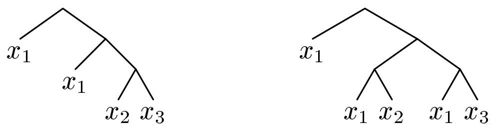
Předchozí výsledek implikuje, že term t náleží do definičního oboru termu DI_α tehdy a jen tehdy, pokud je kostra termu t dost veliká:

Lemma 5.6 (i) *Term t náleží do definičního oboru operátoru D_α tehdy a jen tehdy, pokud adresa $\alpha 10$ náleží do kostry termu t.*
(ii) *Term t náleží do definičního oboru operátoru I_α tehdy a jen tehdy, pokud adresa α náleží do kostry termu t.*
(iii) *Term t náleží do definičního oboru operátoru D^{-1}_α tehdy a jen tehdy, pokud adresy $\alpha 10$ a $\alpha 00$ náleží do kostry termu t a platí* $\text{sub}(t, \alpha 00) = \text{sub}(t, \alpha 10)$.
(iv) *Term t náleží do definičního oboru operátoru I^{-1}_α tehdy a jen tehdy, pokud adresa $\alpha 1$ náleží do kostry termu t a platí* $\text{sub}(t, \alpha 0) = \text{sub}(t, \alpha 1)$.

Tvrzení 5.7 (i) *Pro každé slovo w na $\mathbf{A}^{\pm 1}_{\text{LDI}}$ je buďto operátor DI_w prázdný, anebo existuje jednoznačná dvojice (t^L_w, t^R_w) kanonických termů z T_X takových, že operátor DI_w posílá term t na term t' tehdy a jen tehdy, pokud je dvojice (t, t') instancí dvojice (t^L_w, t^R_w).*
(ii) *Pro každé slovo u na $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$, je operátor DI_u neprázdný a term t^L_u je lineární; v tomto případě term t náleží do definičního oboru operátoru DI_u tehdy a jen tehdy, pokud je kostra termu t podmnožinou kostry termu t^L_u.*

Příklad 5.8 Existují LDI-operátory, jejichž definiční obor je prázdný. Uvažujme například operátor $\text{I}_\varnothing \bullet \text{I}_1 \bullet \text{I}^{-1}_\varnothing$. Operátor $\text{I}_{\varnothing \cdot 1}$ posílá každý term t na term $t \cdot t \cdot t$. Podle lemmatu 5.6 term $t \cdot t \cdot t$ nenáleží do definičního oboru operátoru $\text{I}^{-1}_\varnothing$, protože se jeho levý podterm liší od jeho pravého podtermu. Takže operátor $\text{I}_{\varnothing \cdot 1 \cdot \varnothing^{-1}}$ je prázdný.

Příklad 5.9 Dvojice (t^L_w, t^R_w) pro $\text{DI}_w = \text{D}_\varnothing \bullet \text{I}^{-1}_0 \bullet \text{D}_1$ je představena na obrázku 5.3. Popis, jak najít tyto termy je dán v [12].



Obrázek 5.3: Dvojice (t^L_w, t^R_w) pro $\text{DI}_w = \text{D}_\varnothing \bullet \text{I}^{-1}_0 \bullet \text{D}_1$.

Předchozí výsledek může být zobecněn pro případ více operátorů.

Tvrzení 5.10 *Buďte $w_1, \dots, w_m$ slova na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}^{\pm 1}$. Pak je průnik definičních oborů operátorů $\mathrm{DI}_{w_1}, \dots, \mathrm{DI}_{w_m}$ buďto prázdný, anebo se jedná o množinu všech substituentů jednoznačného kanonického termu $t^L_{w_1,\dots,w_m}$. Jsou-li $w_1, \dots, w_m$ kladná slova, pak nastane druhý případ a term $t^L_{w_1,\dots,w_m}$ je lineární.*

5.2 Relace v geometrických monoidech

V této sekci studujeme relace v geometrických monoidech LDI a LDLI a nalezneme tři druhy relací. Díky těmto relacím odvodíme vztah mezi LDI-ekvivalencí a LDLI-ekvivalencí. Důkaz se hodně podobá tomu pro LD, ale je třeba jej zde udělat, protože nevíme a priori, zda operátory I splňují stejné vlastnosti jako operátory D.

Definice: Pro w slovo na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}^{\pm 1}$ a γ adresu z $\mathbf{A}$, značíme $\mathrm{sh}_\gamma(w)$, nebo jednoduše γw, *γ-posun* slova w definovaný jako slovo, které se dostane z w nahrazením každé adresy $\alpha^{\pm 1}$ adresou $\gamma\alpha^{\pm 1}$.

Lemma 5.11 *Pro každé α, $\mathrm{DI}_w = \mathrm{DI}_{w}$ implikuje $\mathrm{DI}_{\alpha w} = \mathrm{DI}_{\alpha w'}$.*

DŮKAZ: Jednoduchá indukce podle $\lg(w)$ ukáže, že t náleží do definičního oboru operátoru $\mathrm{DI}_{\alpha w}$ tehdy a jen tehdy, pokud $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ náleží do definičního oboru operátoru DI_w. V tom případě se term $t \bullet \mathrm{DI}_{\alpha w}$ dostane z t nahrazením podtermu $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ jeho obrazem při DI_w. ∎

První druh relací v $\mathcal{G}_{\mathrm{H}}$ vyjadřuje, že operátory přidružené ke kolmým adresám mají nezávislé akce.

Tvrzení 5.12 *Buďte α a β dvě kolmé adresy v $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$. Pak operátory DI_α a DI_β komutují.*

DŮKAZ: Podle lemmatu 5.6 term t náleží do definičního oboru termu $\mathrm{DI}_\alpha \bullet \mathrm{DI}_\beta$ tehdy a jen tehdy, pokud je kostra termu $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ dost velká a pokud je kostra termu $\mathrm{sub}(t, \beta)$ dost velká. Tyto dva podtermy jsou disjunktní, a tak vidíme, že obraz termu t při $\mathrm{DI}_\alpha \bullet \mathrm{DI}_\beta$ stejně jako při $\mathrm{DI}_\beta \bullet \mathrm{DI}_\alpha$ znamená nahradit podterm $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ termem $\mathrm{sub}(t, \alpha) \bullet \varnothing$ a podterm $\mathrm{sub}(t, \beta)$ termem $\mathrm{sub}(t, \beta) \bullet \varnothing$. ∎

Důsledek 5.13 *Buďte w_1 a w_2 dvě slova na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}^{\pm 1}$ taková, že všechny adresy z w_1 jsou kolmé na adresy z w_2. Pak DI_{w_1} a DI_{w_2} komutují.*

Nyní pro každé kladné slovo u definujeme dědice množiny adres B. Dědicové jsou adresy, které se dostanou jako obrazy množiny B při operátoru DI_u.

Definice: Buď B množina adres z $\mathbf{A}$, a buď u slovo na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$. Množina $\mathrm{Heir}(B, u)$ všech *dědiců* adres z B při operátoru DI_u je definována induktivně:

(i) $\mathrm{Heir}(B,u)$ existuje tehdy a jen tehdy, pokud $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ existuje pro každou adresu β v B, a vtom případě máme $\mathrm{Heir}(B,u) = \bigcup_{\beta\in B} \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$;
(ii) Pro každé B máme $\mathrm{Heir}(B,\varepsilon) = B$;
(iii) Pro každou adresu α v $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ je $\mathrm{Heir}(\{\beta\},\alpha)$ definována jako:

$$\mathrm{Heir}(\{\beta\},\alpha) = \begin{cases} \{\beta\} & \text{pro } \beta \perp \alpha \text{ nebo } \beta = \alpha 11\gamma, \\ \{\alpha 00\gamma, \alpha 10\gamma\} & \text{pro } \beta = \alpha 0\gamma, \\ \{\alpha 01\gamma\} & \text{pro } \beta = \alpha 10\gamma, \\ \text{není definována} & \text{pro } \beta \sqsubseteq \alpha 1, \end{cases} \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbf{A}_{\text{LD}},$$

$$\mathrm{Heir}(\{\beta\},\alpha) = \begin{cases} \{\beta\} & \text{pro } \beta \perp \alpha, \\ \{\alpha 0\gamma, \alpha 1\gamma\} & \text{pro } \beta = \alpha\gamma, \\ \text{není definována} & \text{pro } \beta \sqsubset \alpha. \end{cases} \qquad \text{pro } \alpha \in \mathbf{A}_{\text{I}},$$

(iv) Pro $u = \alpha \cdot u_0$ máme $\mathrm{Heir}(B,u) = \mathrm{Heir}(\mathrm{Heir}(B,\alpha),u_0)$, pokud existuje.

Čtenář může okamžitě ověřit následující lemma:

Lemma 5.14 *Buď u slovo na $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ a buď β adresa.*
(i) Množina $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ existuje tehdy a jen tehdy, pokud je nějaká vnější adresa termu t_u^L předponou adresy β.
(ii) Pokud je $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ definována, pak je $\mathrm{Heir}(\{\beta\gamma\},u)$ také definována pro každou adresu γ a platí $\mathrm{Heir}(\{\beta\gamma\},u) = \{\beta'\gamma;\ \beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)\}$.
(iii) Prvky každé množiny $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ jsou navzájem kolmé.
(iv) Předpokládejme $t' = t \bullet u$ a β v $\mathrm{Skel}(t)$. Pokud je $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ definována, pak platí $\mathrm{sub}(t',\beta') = \mathrm{sub}(t,\beta)$ pro každou β' v $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$.

Bod (iv) implikuje pro každou vnější adresu α termu t, že množina $\mathrm{Heir}(\{\alpha\},u)$ jsou externí adresy termu t'. Speciálně, je-li t lineární, pak je množina $\mathrm{Heir}(\{\alpha\},u)$ množinou všech vnějších adres α' termu t' splňujících $\mathrm{sub}(t',\alpha') = \mathrm{sub}(t,\alpha)$.

Příklad 5.15 Předpokládejme $\mathrm{DI}_u = \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{10}$. Je evidentní, že term t_u^L je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$. Pak nejsou pro adresy $\varnothing$ a 1 množiny dědiců definovány. Pro ostatní adresy platí $\mathrm{Heir}(\{0\},u) = \{00, 100, 101\}$, $\mathrm{Heir}(\{10\},u) = \{01\}$ a $\mathrm{Heir}(\{11\},u) = \{11\}$.

Můžeme teď představit druhý druh relací, a to relace vázané na dědičnost.

Tvrzení 5.16 *Nechť je u slovo na $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$, nechť je β adresa z $\mathbf{A}$ a nechť je $\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)$ definována. Pak platí*

$$\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_u \bullet \prod_{\beta'\in\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathrm{D}_{\beta'}, \tag{5.1}$$

$$\mathrm{I}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_u \bullet \prod_{\beta'\in\mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathrm{I}_{\beta'}. \tag{5.2}$$

Důkaz: Tvrzení dokážeme indukcí podle $\lg(u)$. Pro $u = \varepsilon$ je tvrzení evidentní. Nechť je nyní $\mathrm{DI}_u = \mathrm{I}_\alpha$. Množina $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ existuje, a tak je α buďto kolmá na β, anebo je předponou β. Kolmý případ je řešen tvrzením 5.12. Nechť je tedy $\alpha\gamma = \beta$. Chceme dokázat $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha = \mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$. Buď t term. Term t náleží do definičního oboru operátoru $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha$ tehdy a jen tehdy, pokud adresa $\beta 10$ náleží do kostry termu t. Term t náleží do definičního oboru operátoru $\mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$ tehdy a jen tehdy, pokud adresy $\alpha 0\gamma 10$ a $\alpha 1\gamma 10$ náleží do definičního oboru operátoru $t \bullet \alpha$, což platí právě tehdy, když adresa $\alpha\gamma$ náleží do kostry termu t. Takže operátory $\mathrm{D}_\beta \bullet \mathrm{I}_\alpha$ a $\mathrm{I}_\alpha \bullet \mathrm{D}_{\alpha 0\gamma} \bullet \mathrm{D}_{\alpha 1\gamma}$ mají stejný definiční obor a jednoduchý výpočet ukáže, že si jsou rovny. Argument je podobný pro operátor D_β a pro $\alpha \in \mathbf{A}_{\mathrm{LI}}$.

Předpokládejme teď $\lg(u) \geqslant 2$, řekněme $u = \alpha \cdot u_0$. Dle definice, předpoklad že $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ existuje implikuje existenci množin $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)$ a $\mathrm{Heir}(\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha), u_0)$ a že ta druhá je rovna $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$. Dle indukčního předpokladu platí

$$\mathrm{DI}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_\alpha \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)} \mathrm{DI}_{\beta'} \bullet \mathrm{DI}_{u_0} .$$

Opět dle indukčního předpokladu platí pro každou β' z $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)$,

$$\mathrm{DI}_{\beta'} \bullet \mathrm{DI}_{u_0} = \mathrm{DI}_{u_0} \bullet \prod_{\beta'' \in \mathrm{Heir}(\{\beta'\}, u)} \mathrm{DI}_{\beta''},$$

a dostaneme

$$\mathrm{DI}_\beta \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_\alpha \bullet \prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, \alpha)} \prod_{\beta'' \in \mathrm{Heir}(\{\beta'\}, u)} \mathrm{DI}_{\beta''} .$$

Nyní jsou podle lemmatu 5.14 (*ii*) adresy β' po dvou kolmé, příslušné operátory komutují a dvojitý součin ve formuli je roven výrazu $\prod_{\beta' \in \mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)} \mathrm{DI}_{\beta'}$. ∎

Představíme nyní druh rovností, které nejsou relacemi monoidu $\mathcal{G}_{\mathrm{LDI}}$, protože operátory mají různé definiční obory. Nicméně, tyto obory se liší pouze maličko: každý term, jehož je adresa α externí adresou, náleží do definičního oboru I_α a nenáleží do definičního oboru $\mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha$.

Tvrzení 5.17 *Buď t term a α adresa. Pokud adresa $\alpha 1$ náleží do kostry termu t, pak platí*

$$t \bullet \mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha = t \bullet \mathrm{I}_\alpha . \tag{5.3}$$

Důkaz: Adresa $\alpha 1$ náleží do kostry termu t, takže podterm $\mathrm{sub}(t, \alpha)$ je ve tvaru $t_1 \cdot t_2$. Nyní operátor $\mathrm{I}_{\alpha 1} \bullet \mathrm{D}_\alpha$ posílá tento podterm na $(t_1 \cdot t_2) \cdot (t_1 \cdot t_2)$, stejně jako operátor I_α. ∎

Pro to, abychom představili třetí druh relací, potřebujeme nejdřív zavést operátor, který odpovídá stejnoměrné distribuci.

Definice [12]: Pro t term definujeme slovo δ_t na $\mathbf{A}_{\text{LD}}$ jako:

$$\delta_t = \begin{cases} \varepsilon & \text{když je } t \text{ proměnná,} \\ \varnothing \cdot 1\delta_{t_2} \cdot 0\delta_{t_1} & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2. \end{cases} \tag{5.4}$$

Tvrzení 5.18 [**12**] *Buďte t_0, t, t' termy. Pak term $t_0 \cdot t'$ náleží do definičního oboru operátoru D_{δ_t} tehdy a jen tehdy, pokud kostra termu t' obsahuje kostru termu t. Operátor D_{δ_t} posílá $t_0 \cdot t$ na $t_0 * t$.*

Příklad 5.19 V [12] je dokázáno, že slovo δ_t je součinem všech vnitřních adres termu t, uspořádaných relací $>$. Mějme $t = x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3 \cdot x_4) \cdot x_5$. Existují čtyři vnitřní adresy v t a slovo δ_t je rovno $\varnothing \cdot 1 \cdot 10 \cdot 101$.

Třetí druh relací se váže na slovo δ_t :

Tvrzení 5.20 *Buď u slovo na $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$ takové, že DI_u posílá term t na term t'. Pokud t není proměnná, pak platí:*

$$\mathrm{D}_{\delta_t} \bullet \mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_{1u} \bullet \mathrm{D}_{\delta_{t'}} . \tag{5.5}$$

DŮKAZ: Myšlenka důkazu je následující: když má operátor DI_{δ_t} akci na termu $t_0 \cdot t$, distribuuje se term t_0 do všech listů termu t. Akcí operátoru DI_u dostaneme term $t_0 * t'$. A to je totéž jako použít nejdřív DI_{1u} na $t_0 \cdot t$ a poté stejnoměrnou distribuci.

Dokážeme tvrzení indukcí podle u. Tvrzení je už dokázáno v [12] pro u z $\mathbf{A}^*_{\text{LD}}$, předpokládejme tedy u mimo $\mathbf{A}_{\text{LD}}$. Tvrzení je evidentní pro $u = \varepsilon$, předpokládejme $\lg(u) = 1$. Poněvadž u nepatří do $\mathbf{A}^*_{\text{LD}}$, máme $u = \alpha$ pro adresu α z $\mathbf{A}_{\text{I}}$. Použijeme indukci podle délky adresy α jakožto slova na $\{0, 1\}$. Předpokládejme nejdříve $\alpha = \varnothing$. Máme ověřit rovnost $\mathrm{D}_{\delta_t} \bullet \mathrm{I}_\varnothing = \mathrm{I}_1 \bullet \mathrm{DI}_{\delta_{t'}}$, kde $\mathrm{I}_\varnothing$ posílá t na t'. Dle indukčního předpokladu není term t proměnná, a tak platí

$$\mathrm{D}_{\delta_t} \bullet \mathrm{I}_\varnothing = \mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_{0\delta_t} \bullet \mathrm{D}_{1\delta_t} = \mathrm{I}_1 \bullet \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_{1\delta_t} \bullet \mathrm{D}_{0\delta_t} = \mathrm{I}_1 \bullet \mathrm{D}_{\delta_{t'}} .$$

Předpokládejme teď $\alpha = e\beta$ s $e = 0$ nebo $e = 1$. Píšeme $t = t_1 \cdot t_2$ a $t' = t'_1 \cdot t'_2$. Předpokládejme nejdřív $e = 1$. Relace $t' = t \bullet \alpha$ implikuje $t'_1 = t_1$ a $t'_2 = t_2 \bullet \beta$. Oba operátory mají akci na termech, jejichž kostra obsahuje adresu 11, takže term t_2 není proměnná. Podle indukčního předpokladu platí $\mathrm{D}_{\delta_{t_2}} \bullet \mathrm{I}_\beta = \mathrm{I}_{1\beta} \bullet \mathrm{D}_{\delta_{t'_2}}$, a dostaneme podle lemmatu 5.11

$$\mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_{1\delta_{t_2}} \bullet \mathrm{I}_{1\beta} = \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{11\beta} \bullet \mathrm{D}_{1\delta_{t'_2}} .$$

Když se obě strany vynásobí členem $\mathrm{D}_{0\delta_{t_1}}$, který komutuje s $\mathrm{I}_{11\beta}$ díky kolmosti, pomocí faktu, že $\mathrm{D}_\varnothing$ a $\mathrm{I}_{11\beta}$ komutují dle tvrzení 5.16, dostaneme

$$\mathrm{D}_{\delta_t} \bullet \mathrm{I}_{1\beta} = \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_{1\delta_{t_2}} \bullet \mathrm{D}_{0\delta_{t_1}} \bullet \mathrm{I}_{1\beta} = \mathrm{I}_{11\beta} \bullet \mathrm{D}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_{1\delta_{t'_2}} \bullet \mathrm{D}_{0\delta_{t_1}} = \mathrm{I}_{11\beta} \bullet \mathrm{D}_{\delta_{t'}} .$$

Argument je podobný pro $\alpha = 0\beta$.

Předpokládejme nyní $\lg(u) \geqslant 2$, řekněme $u = \alpha \cdot u_0$, s α v $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. Nechť DI_α posílá t na t'' a podle indukčního předpokladu platí

$$\text{D}_{\delta_t} \bullet \text{DI}_\alpha \bullet \text{DI}_{u_0} = \text{DI}_{1\alpha} \bullet \text{D}_{\delta_{t''}} \bullet \text{D}_{u_0} = \text{DI}_{1\alpha} \bullet \text{DI}_{1u_0}\,\text{D}_{\delta_{t'}} = \text{DI}_{1u} \bullet \text{D}_{\delta_{t'}}\,.$$

■

Nyní dokážeme, že dva termy jsou LDLI-ekvivalentní právě tehdy, když jsou LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku.

Definice: Pro t term definujeme *pravou délku* jako:

$$\begin{aligned} &\text{rht}(t) = 0 && \text{když je } t \text{ proměnná,} \\ &\text{rht}(t) = \text{rht}(t_2) + 1 && \text{pro } t = t_1 \cdot t_2. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Vidíme, že pravá výška termu t je délka nejpravější větve termu t.

Nejdřív představíme tři pomocné výsledky:

Lemma 5.21 *Pro každé w na $\mathbf{A}^{\pm1}_{\text{LDI}}$ takové, že definiční obor operátoru DI_w není prázdný, platí*

$$\text{DI}_w \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w} \bullet \text{DI}_{1w} \tag{5.7}$$

DŮKAZ: Term t náleží do definičního oboru operátoru $\text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w} \bullet \text{DI}_{1w}$ tehdy a jen tehdy, pokud náleží do definičního oboru operátoru DI_w. Poté dva operátory posílají t na $(t \bullet w) \cdot (t \bullet w)$. ■

Lemma 5.22 *Pro každé slovo w na $\mathbf{A}^{\pm1}_{\text{LDI}}$ takové, že definiční obor operátoru DI_w není prázdný, existuje slovo w' na $\mathbf{A}^{\pm1}_{\text{LDLI}}$ a čísla p a q taková, že platí*

$$\text{DI}_w = \text{I}^p_\varnothing \bullet \text{DI}_{w'} \bullet \text{I}^{-q}_\varnothing\,. \tag{5.8}$$

Speciálně je číslo p menší než počet adres ve w, které jsou ve tvaru $1^k \in \mathbf{A}_{\text{I}}$ a číslo q je menší než počet adres ve w, které jsou ve tvaru $(1^k)^{-1} \in \mathbf{A}_{\text{I}}^{-1}$.

DŮKAZ: Podle tvrzení 5.17 a podle induktivního argumentu platí

$$\text{I}_{\alpha 1^k} = \text{I}_\alpha \bullet \text{D}^{-1}_\alpha \bullet \text{D}^{-1}_{\alpha 1} \bullet \cdots \bullet \text{D}^{-1}_{\alpha 1^k}\,.$$

Označme w_0 slovo, které se dostane ze slova w nahrazením každé adresy 1^k z $\mathbf{A}_{\text{I}}$ s $k \geqslant 1$ ekvivalentním slovem. Slovo w_0 je slovo na $(\mathbf{A}_{\text{LDLI}} \cup \{\varnothing_{\text{I}}\})^{\pm1}$. Nyní dokážeme lemma indukcí podle počtu adres $\varnothing^{\pm1} \in \mathbf{A}_{\text{I}}^{\pm1}$ ve slově w_0. Pokud není žádná taková adresa, výsledek platí. Předpokládejme nyní, že máme alespoň jednu. Nechť je nejdříve $\text{DI}_{w_0} = \text{DI}_{w_1} \bullet \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{w_2}$ kde w_1 je slovo na $\mathbf{A}^{\pm1}_{\text{LDLI}}$. Podle lemmatu 5.21 platí $\text{DI}_{w_1} \bullet \text{I}_\varnothing = \text{I}_\varnothing \bullet \text{DI}_{0w_1} \bullet$

DI_{1w_1} a slovo $0w_1 \cdot 1w_1 \cdot w_2$ obsahuje méně adres $\varnothing^{\pm 1} \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{\pm 1}$ než slovo w_0. Argument pro $\mathrm{DI}_{w_0} = \mathrm{DI}_{w_3} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_4}$, kde w_4 je slovo na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1}$ je podobný. Poslední možný případ je $\mathrm{DI}_{w_0} = \mathrm{DI}_{w_5} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{DI}_{w_7}$, kde w_6 je slovo na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1}$. Platí

$$\mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} = \mathrm{DI}_{1w_6} \bullet \mathrm{DI}_{0w_6} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} = \mathrm{DI}_{1w_6} \bullet \mathrm{DI}_{0w_6}$$

a slovo $w_5 \cdot 1w_6 \cdot 0w_6 \cdot w_7$ obsahuje méně adres $\varnothing^{\pm 1} \in \mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{\pm 1}$ než slovo w_0. ■

Příklad 5.23 Předpokládejme $\mathrm{DI}_w = \mathrm{I}_1^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_{01} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{11}$. Snadno se ověří, že term $x \cdot (((y \cdot z) \cdot (y \cdot z)) \cdot (y \cdot z)) \cdot (((y \cdot z) \cdot (y \cdot z)) \cdot (y \cdot z))$ náleží do definičního oboru operátoru DI_w. Nyní máme

$$\begin{aligned}
\mathrm{DI}_w &= \mathrm{I}_1^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_{01} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{11} \\
&= \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{D}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_0^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1} \\
&= \mathrm{D}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_1 \bullet \mathrm{D}_{00} \cdot \mathrm{D}_{10} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_{011} \bullet \mathrm{D}_{111} \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{10}^{-1} \\
&\bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1} = \mathrm{I}_{\varnothing} \bullet \mathrm{D}_0 \bullet \mathrm{D}_1 \bullet \mathrm{D}_{00} \bullet \mathrm{D}_{10} \bullet \mathrm{D}_{01} \bullet \mathrm{D}_{11} \bullet \mathrm{D}_{000} \bullet \mathrm{D}_{100} \bullet \mathrm{D}_{010} \\
&\bullet \mathrm{D}_{110} \bullet \mathrm{D}_{011} \bullet \mathrm{D}_{111} \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10} \bullet \mathrm{D}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{00}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{10}^{-1} \bullet \mathrm{D}_{\varnothing}^{-1} \bullet \mathrm{D}_1^{-1}
\end{aligned}$$

Lemma 5.24 *Buďte t, t' dva termy splňující $t \overset{\mathrm{LDI}}{=} t'$. Pak platí $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$ nebo $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$.*

DŮKAZ: Buď w slovo splňující $t \bullet w = t'$. Podle lemmatu 5.22 platí $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{p} \bullet \mathrm{DI}_{w'} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-q} = t'$. Označme t_1 term $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{p}$ a t_1' term $t' \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{q}$. Platí $t_1 \overset{\mathrm{LDI}}{=} t_1'$, a tak termy t_1 a t_1' mají společnou LDLI-expanzi, řekněme t_2. Term t je iterovaný levý podterm termu t_1, a tak podle důsledku 4.32 existuje adresa α v obrysu termu t_2 taková, že řez termu t_2 v adrese α je LDLI-expanzí termu t. Stejně tak existuje adresa α' obrysu termu t_2 taková, že řez termu t_2 v adrese α' je LDLI-expanzí termu t'. Nyní platí $\alpha \leqslant \alpha'$ nebo $\alpha' \leqslant \alpha$. Pokud platí $\alpha \leqslant \alpha'$, pak je term $\mathrm{cut}(t_2, \alpha)$ řezem termu $\mathrm{cut}(t_2, \alpha')$ a podle tvrzení 4.34 platí $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$. Stejně tak v případě $\alpha' \leqslant \alpha$ platí $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. ■

Nyní dokážeme, že dva termy jsou LDLI-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud jsou LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku. Pro tento důkaz potřebujeme domněnku 4.44.

Tvrzení 5.25 *Je-li domněnka 4.44 pravdivá, pak dva termy t a t' jsou LDLI-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jsou-li LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku.*

DŮKAZ: Jelikož identity LD a LI zachovávají pravou výšku, ten netriviální směr je '$\Leftarrow$'. Buďte t a t' dva LDI-ekvivalentní termy se stejnou pravou výškou. Podle lemmatu 5.24 platí $t \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t'$ nebo $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. Předpokládejme bez újmy na obecnosti $t' \sqsubseteq_{\mathrm{LDLI}} t$. Označme t_0 t-∂_{LDI}-normální term, který je LDI-ekvivalentní termu t, t_1 t-∂_{LDLI}-normální term, který je LDLI-ekvivalentní termu t a t_2 t-∂_{LDLI}-normální term, který je LDLI-ekvivalentní termu t'. Podle lemmatu 4.41 je term t_2 řezem termu $\partial_{\mathrm{LDI}}^{k} t$ pro nějaké k. Termy t_1 a t_2 jsou LDI-ekvivalentní termu t_0, a tak, podle domněnky 4.44, jsou LDI-expanzemi termu t_0. Označme $t_0 \bullet u_1 = t_1$ a $t_0 \bullet u_2 = t_2$ s u a v slovy na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$. Podle lemmatu 5.22 platí $\mathrm{DI}_{u_i} = \mathrm{I}_{\varnothing}^{p_i} \bullet \mathrm{DI}_{w_i}$ pro $i = 1, 2$, kde w_i je slovo na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}^{\pm 1}$. Takže platí $t_1 \bullet \mathrm{DI}_{w_1}^{-1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{-p_1} \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{p_2} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} = t_2$.

Slova w_1 a w_2 nemění pravou výšku termů a platí $\mathrm{rht}(t_1) = \mathrm{rht}(t_2)$, takže máme $p_1 = p_2$. A tak platí $t_1 \bullet \mathrm{DI}_{w_1}^{-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} = t_2$. Poněvadž je term t LDLI-ekvivalentní termu t_1 a term t' je LDLI-ekvivalentní termu t_2, tyto dva termy jsou LDLI-ekvivalentní. ∎

5.3 Syntaktické relace

V této sekci studujeme monoidy definované základními relacemi platnými v geometrických monoidech. Z těchto relací odvodíme všechny ostatní typy relací, které byly dokázány pro geometrické monoidy a speciálně i konfluenci.

Definice: Množina $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDI}}$ je definována jako množina symbolů di_α s α z $\mathbf{A}_{\text{LDI}}$. *LDI-relace* je jedna z dvojic slov na $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDI}}$ mezi následujícími relacemi:

$$
\begin{array}{rcl}
(\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1\beta}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma1\beta}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}) & & \text{typ } \perp\\
(\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1\beta}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma1\beta}\cdot\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}) & & \text{typ } \perp\\
(\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma1\beta}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma1\beta}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}) & & \text{typ } \perp\\
(\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma1\beta}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma1\beta}\cdot\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}) & & \text{typ } \perp\\
(\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma00\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma10\alpha}) & & \text{typ D0}\\
(\mathrm{d}_{\gamma10\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma01\alpha}) & & \text{typ D10}\\
(\mathrm{d}_{\gamma11\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma11\alpha}) & & \text{typ D11}\\
(\mathrm{d}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}) & & \text{typ D1}\\
(\mathrm{i}_{\gamma\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma1\alpha}) & & \text{typ I}\\
(\mathrm{d}_{\gamma\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1\alpha}) & & \text{typ DI}\\
(\mathrm{i}_{\gamma0\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma00\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma10\alpha}) & & \text{typ ID0}\\
(\mathrm{i}_{\gamma10\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma01\alpha}) & & \text{typ ID10}\\
(\mathrm{i}_{\gamma10}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma0}) & & \text{typ ID10+}\\
(\mathrm{i}_{\gamma11\alpha}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma11\alpha}) & & \text{typ ID11}\\
(\mathrm{i}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma0}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma}) & & \text{typ ID1}\\
(\mathrm{di}_{\gamma\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{di}_{\gamma\alpha}\cdot\mathrm{i}_{\gamma}) & & \text{typ C}\\
(\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma11}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}\ ,\ \mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{i}_{\gamma1}) & & \text{typ C}\\
(\mathrm{i}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{di}_{\gamma1\alpha}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma}\cdot\mathrm{di}_{\gamma1\alpha}) & \mathrm{lg}(\alpha)\geqslant 1 & \text{typ C}\\
(\mathrm{i}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}) & & \text{typ C}\\
(\mathrm{i}_{\gamma1}\cdot\mathrm{d}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}\ ,\ \mathrm{i}_{\gamma}\cdot\mathrm{d}_{\gamma1}) & & \text{typ C}
\end{array}
$$

Množina $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDLI}}$ je definována jako množina symbolů di_α s α v $\mathbf{A}_{\text{LDLI}}$. *LDLI-relace* je LDI-relace (u, v) taková, že u a v náleží do $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{LDLI}}$. Pro ⌑ systém LDI, LDLI je relace $\equiv_{\text{⌑}}^{+}$ definována jako kongruence monoidu $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{⌑}}^{*}$ generovaná ⌑-relacemi, a relace $\equiv_{\text{⌑}}$ je definována jako kongruence monoidu $(\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\text{⌑}}^{\pm1})^{*}$ generovaná ⌑-relacemi a relacemi $(\mathrm{di}_\gamma \cdot \mathrm{di}_\gamma^{-1}, \varepsilon)$

a $(\mathrm{di}_\gamma^{-1}\cdot\mathrm{di}_\gamma,\varepsilon)$.

Tvrzení 5.26 *Pro u,v v $\mathbf{A}^*_{\mathrm{LDI}}$ relace $\mathrm{di}_u\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{di}_v$ implikuje $\mathrm{DI}_u=\mathrm{DI}_v$.*

DŮKAZ: Výsledek stačí dokázat pro dvojice LDI-relací. Tvrzení 5.12 dává výsledek pro typy $\perp$, Tvrzení 5.16 pro typy D0, D10, D11, I, DI, ID0, ID10 a ID11. Tvrzení 5.20 položením $t=x\cdot y\cdot z$ a $\mathrm{DI}_u=\mathrm{D}_\varnothing$ dává výsledek pro typ D1, položením $t=x\cdot y$ a $\mathrm{DI}_u=\mathrm{I}_\varnothing$ pro typ ID1 a položením $t=x\cdot y$ a $\mathrm{DI}_u=\mathrm{I}_0$, pro typ ID10+. Nakonec tvrzení 5.17 dává výsledek pro typ C. ∎

Jestlipak je obrácené tvrzení k 5.26 pravdivé, tzn. jestlipak $\mathrm{DI}_u=\mathrm{DI}_v$ implikuje $\mathrm{di}_u\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{di}_v$? Odpověď je záporná pro ekvivalenci $\equiv^+_{\mathrm{LDLI}}$. Platí

$$\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_{00}\cdot\mathrm{i}_0\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_{000}\cdot\mathrm{i}_{010}\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_{01}\cdot\mathrm{d}_0\cdot\mathrm{i}_{000}\cdot\mathrm{i}_{010}\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_{01}\cdot\mathrm{i}_{00}\cdot\mathrm{d}_0\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{d}_0$$

ale v sekci 4 dokážeme, že platí $\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_{00}\cdot\mathrm{i}_0\not\equiv^+_{\mathrm{LDLI}}\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{i}_0\cdot\mathrm{d}_0$. Naproti tomu odpověď pro ekvivalenci $\equiv^+_{\mathrm{LDI}}$ zůstává neznámá.

Dokážeme nejdříve, že $\boxtimes$-relace dávají stejné druhy relací jako jsou ty, které jsme nalezli v geometrických monoidech. Je třeba udělat celý výpočet formálně, neboť nevíme, jestli se všechny relace platné v geometrických monoidech přenášejí do syntaktických relací.

Tvrzení 5.27 *Pro u,u' dvě slova na $\mathbf{A}_{\boxtimes}$ a α v $\mathbf{A}$ relace $\mathrm{di}_u\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{di}_{u'}$ implikuje $\mathrm{di}_{\alpha u}\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{di}_{\alpha u'}$. Pro w,w' slova na $\mathbf{A}^{\pm1}_{\boxtimes}$ relace $\mathrm{di}_w\equiv_{\boxtimes}\mathrm{di}_{w'}$ implikuje $\mathrm{di}_{\alpha w}\equiv_{\boxtimes}\mathrm{di}_{\alpha w'}$.*

DŮKAZ: Stačí to dokázat pro $(\mathrm{di}_u,\mathrm{di}_v)$ $\boxtimes$-relaci. Pokud je $(\mathrm{di}_u,\mathrm{di}_v)$ $\boxtimes$-relace, pak je dvojice $(\mathrm{di}_{\alpha u},\mathrm{di}_{\alpha v})$ také $\boxtimes$-relace. ∎

Lemma 5.28 *Buďte u_1 a u_2 dvě slova na $\mathbf{A}_{\boxtimes}$ taková, že všechny adresy v u_1 jsou kolmé na všechny adresy v u_2. Pak platí*

$$\mathrm{di}_{u_1}\cdot\mathrm{di}_{u_2}\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{di}_{u_2}\cdot\mathrm{di}\,u_1 \tag{5.9}$$
$$\mathrm{di}_{u_1}\cdot\mathrm{di}_{u_2}\cdot\mathrm{i}_\varnothing\equiv^+_{\mathrm{LDI}}\mathrm{i}_\varnothing\cdot\mathrm{di}_{0u_1}\cdot\mathrm{di}_{0u_2}\cdot\mathrm{di}_{1u_1}\,\mathrm{di}_{1u_2} \tag{5.10}$$
$$\mathrm{di}_{0u_1}\cdot\mathrm{di}_{0u_2}\cdot\mathrm{d}_\varnothing\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{d}_\varnothing\cdot\mathrm{di}_{00u_1}\cdot\mathrm{di}_{00u_2}\cdot\mathrm{di}_{10u_1}\,\mathrm{di}_{10u_2} \tag{5.11}$$
$$\mathrm{di}_{10u_1}\cdot\mathrm{di}_{10u_2}\cdot\mathrm{d}_\varnothing\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{d}_\varnothing\cdot\mathrm{di}_{01u_1}\,\mathrm{di}_{01u_2} \tag{5.12}$$
$$\mathrm{di}_{11u_1}\cdot\mathrm{di}_{11u_2}\cdot\mathrm{d}_\varnothing\equiv^+_{\boxtimes}\mathrm{d}_\varnothing\cdot\mathrm{di}_{11u_1}\,\mathrm{di}_{11u_2} \tag{5.13}$$

DŮKAZ: Použitím indukce podle $\lg(u_1)+\lg(u_2)$. ∎

Tvrzení 5.29 *Nechť je u slovo na $\mathbf{A}_{\text{H}}$, nechť je β adresa z $\mathbf{A}$ a nechť je* $\mathrm{Heir}(\{\beta\}, u)$ *definovaná. Pak platí*

$$\mathtt{d}_\beta \cdot \mathtt{di}_u \equiv^+_{\text{H}} \mathtt{di}_u \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathtt{d}\,\beta',$$
$$\mathtt{i}_\beta \cdot \mathtt{di}_u \equiv^+_{\text{H}} \mathtt{di}_u \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Heir}(\{\beta\},u)} \mathtt{i}\,\beta'.$$

DŮKAZ: Důkaz je podobný tomu od tvrzení 5.16. Pro u délky 1 tvrzení platí díky jedné z relací typu $\perp$, D0, D10, D11, I, DI, ID0, ID10 nebo ID11. Pro u větší délky stačí znát lemma 5.28 a zbytek se podobá důkazu tvrzení 5.16. ∎

Tvrzení 5.30 *Nechť je u slovo na $\mathbf{A}_{\text{H}}$, nechť t není proměnná a nechť* DI_u *posílá t na t'. Pak platí*

$$\mathtt{d}_{\delta_t} \cdot \mathtt{di}_u \equiv^+_{\text{H}} \mathtt{di}_{1u} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t'}}\,. \tag{5.14}$$

DŮKAZ: Důkaz pro u v $\mathbf{A}^*_{\text{LD}}$, je proveden v [12] předpokládejme tedy $u \notin \mathbf{A}^*_{\text{LD}}$. Výsledek dokážeme indukcí podle $\lg(u)$. Pro $u = \varepsilon$ výsledek platí, pro $u = \alpha$ provedeme indukci podle délky α. Označme $t = t_1 \cdot t_2$. Pro $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_\varnothing$ platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{d}_{\delta_t} \cdot \mathtt{di}_u &= \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \\
&\equiv^+_{\text{LDI}} \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{01\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{11\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{00\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{d}_{10\delta_{t_1}} && \text{(DI)}\\
&\equiv^+_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_1 \cdot \mathtt{d}_0 \cdot \mathtt{d}_{01\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{11\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{00\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{d}_{10\delta_{t_1}} && \text{(ID1)}\\
&\equiv^+_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_t} \cdot \mathtt{d}_{0\delta_t} = \mathtt{di}_{1u} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t'}}\,. && (\perp)
\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_0$. Pro t_1 proměnnou platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{d}_{\delta_t} \cdot \mathtt{di}_u &= \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{i}_0 \\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} && (\perp)\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_{10} \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_0 = \mathtt{di}_{1u} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t'}}\,. && \text{(ID10+)}
\end{aligned}$$

Pro $t_1 = t_3 \cdot t_4$ platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{d}_{\delta_t} \cdot \mathtt{di}_u &= \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{i}_0 \\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{d}_{00} \cdot \mathtt{d}_{01} \cdot \mathtt{d}_{000\delta_{t_3}} \cdot \mathtt{d}_{010\delta_{t_3}} \cdot \mathtt{d}_{001\delta_{t_4}} \cdot \mathtt{d}_{011\delta_{t_4}} \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} && \text{(DI)}\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_{10} \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathtt{d}_0 \cdot \mathtt{d}_{01\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{d}_{00\delta_{t_1}} = \mathtt{di}_{1u} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t'}}\,. && \text{(ID10+)}
\end{aligned}$$

Mějme nyní $\alpha = 0\beta$ s β neprázdnou v $\mathbf{A}_{\text{I}}$, respektive v $\mathbf{A}_{\text{LI}}$. Píšeme $t' = t'_1 \cdot t'_2$ a víme, že DI_β posílá t_1 na t'_1. Dle indukčního předpokladu platí $\mathtt{d}_{\delta_{t_1}} \cdot \mathtt{i}_\beta \equiv^+_{\text{H}} \mathtt{i}_{1\beta} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t'_1}}$. Podle lemmatu 5.27 platí $\mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \equiv^+_{\text{Ħ}} \mathrm{i}_{01\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}}$ a nalezneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \mathrm{di}_u &= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \equiv^+_{\text{Ħ}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}} \cdot \mathrm{i}_{0\beta} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && (\perp)\\
&\equiv^+_{\text{Ħ}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{i}_{01\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}} \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} && (\text{předp.})\\
&\equiv^+_{\text{Ħ}} \mathrm{di}_{10\beta} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t'_1}} = \mathrm{di}_{1\alpha} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t'}}\,. && (\text{ID10})
\end{aligned}$$

Argument pro $\alpha = 1\beta$ je podobný a indukce podle $\lg(u)$ je snadná. ■

Lemma 5.31 *Pro všechny t_1, t_2 platí*

$$\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} \equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} \big(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{t_1}}\big).$$

DŮKAZ: Tento součin je korektně definován, protože všechny adresy obrysu termu t_2 jsou po dvou kolmé. Dokážeme lemma indukcí podle t_2. Když je t_2 proměnná, platí $\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} = \mathrm{d}_{\delta_{t_1 \cdot t_2}} = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1}}$. Předpokládejme tedy $t_2 = t_3 \cdot t_4$. Platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\delta_{t_1 * t_2}} &= \mathrm{d}_{\delta_{(t_1 * t_3)\cdot(t_1 * t_4)}} = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_1 * t_4}} \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_1 * t_3}} && (\text{def.})\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{1\delta_{t_4}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_4)} (\mathrm{d}_{1\alpha} \cdot \mathrm{d}_{1\alpha 0 \delta_{t_1}}) \cdot \mathrm{d}_{0\delta_{t_3}} \cdot \prod_{\beta \in \mathrm{Out}(t_3)} (\mathrm{d}_{0\beta} \cdot \mathrm{d}_{0\beta 0 \delta_{t_1}}) && (\text{předp.})\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} (\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{t_1}}) && (\perp)
\end{aligned}$$

Což je hledaný tvar. ■

Lemma 5.32 *Pro každý term t a každé slovo u na $\mathbf{A}_{\text{Ħ}}$ platí*

$$\mathrm{di}_{0u} \cdot \mathrm{d}_{\delta_t} \equiv^+_{\text{Ħ}} \mathrm{d}_{\delta_t} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t)} \mathrm{di}_{\alpha 0 u}\,. \tag{5.15}$$

DŮKAZ: Nechť je t_0 term v definičním oboru operátoru DI_u a označme t'_0 term $t_0 \bullet \mathrm{DI}_u$. Pak operátor $\mathrm{DI}_{0u} \cdot \mathrm{D}_{\delta_t}$ posílá $t_0 \cdot t$ na $t'_0 * t$. Takže lemma vyplývá z tvrzení 5.29. ■

V kapitole 4 jsme dokázali, že expanze jsou konfluentní. Tento výsledek, přeložen do řeči monoidů, říká, že každá dvojice prvků má společný násobek. Abychom to mohli dokázat, zavedeme prvky, které odpovídají expanzím ∂t.

Definice: Pro t term definujeme prvky Δ_t^{LDI} a Δ_t^{LDLI} induktivně:

$$\Delta_t^{\text{LDI}} = \begin{cases} \mathrm{i}_\varnothing & \text{když je } t \text{ proměnná,}\\ \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta_{t_2}^{\text{LDI}} & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{5.16}$$

$$\Delta_t^{\text{LDLI}} = \begin{cases} \varepsilon & \text{když je } t \text{ proměnná,}\\ \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\text{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta_{t_2}^{\text{LDLI}} & \text{pro } t = t_1 \cdot t_2, \end{cases} \tag{5.17}$$

kde $\mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_u)$ značí di_{0u}.

Lemma 5.33 *Nechť máme $t = t_1 \cdot t_2$. Pak platí*

$$(i) \qquad \Delta_t^{\text{¤}} \equiv_{\text{¤}}^{+} \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\text{¤}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}}, \tag{5.18}$$

$$(ii) \qquad \Delta_t^{\text{¤}} \equiv_{\text{¤}}^{+} \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \prod_{\alpha \in \mathrm{Out}(t_2)} \mathrm{sh}_{\alpha 0}(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \Delta_{t_2}^{\text{¤}}, \tag{5.19}$$

$$(iii) \qquad \Delta_t^{\mathrm{LDI}} \equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_t^{\mathrm{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_t^{\mathrm{LDLI}}). \tag{5.20}$$

DŮKAZ: (i) Když je t_2 proměnná, výsledek platí pro Δ_t^{LDLI}. Pro Δ_t^{LDI} platí

$$\begin{aligned} \Delta_t^{\mathrm{LDI}} = \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_1 \cdot \mathrm{d}_{\varnothing} = \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}} && \text{(C)} \\ &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}}. && (\perp) \end{aligned}$$

Když t_2 není proměnná, použijeme tvrzení 5.30 a dostaneme $\Delta_t^{\text{¤}} \equiv_{\text{¤}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial t_2}}$.

(ii) Plyne z lemmatu 5.32.

(iii) Použijeme indukci podle t. Výsledek platí i když je t proměnná. Pro $t = t_1 \cdot t_2$ dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta_t^{\mathrm{LDI}} &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) && \text{(předp.)} \\ &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\mathrm{d}_{\delta_{t_2}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\mathrm{d}_{\delta_{t_2}}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) && \text{(LI)} \\ &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta_{t_1}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{sh}_0\, \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{sh}_{1\delta_{t_2}} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDLI}}) && \text{(II)} \\ &\equiv_{\mathrm{LDI}}^{+} \mathrm{i}_{\varnothing} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta_t^{\mathrm{LDLI}}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_t^{\mathrm{LDLI}}), && (\perp) \end{aligned}$$

což končí důkaz. ■

Evidentně očekáváme, že obraz termu t při $\Delta_t^{\text{¤}}$ bude term $\partial_{\text{¤}} t$. Pro každý term t označíme $t \bullet \mathrm{di}_u$ term $t \bullet \mathrm{DI}_u$.

Tvrzení 5.34 *Pro každé t platí $t \bullet \Delta_t^{\text{¤}} = \partial_{\text{¤}} t$.*

DŮKAZ: Použijeme indukci podle t. Když je t proměnná, tvrzení platí. Mějme nyní $t = t_1 \cdot t_2$. Platí $\Delta_t^{\text{¤}} \equiv_{\text{¤}}^{+} \mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}}$. A platí

$$\begin{aligned} t \bullet \Delta_t^{\text{¤}} = (t_1 \cdot t_2) \bullet (\mathrm{sh}_0(\Delta_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}}) = (\partial_{\text{¤}} t_1 \cdot t_2) \bullet (\mathrm{sh}_1(\Delta_{t_2}^{\mathrm{LDI}}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}}) = \\ = (\partial_{\text{¤}} t_1 \cdot \partial_{\text{¤}} t_2) \bullet \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_2}} = \partial t_1 * \partial t_2 \end{aligned}$$

a to je to, co jsme chtěli dokázat. ■

Následující výsledek je překladem výsledku, že ∂t je společnou expanzí všech základních expanzí termu t.

Lemma 5.35 *Nechť term t náleží do definičního oboru operátoru DI_α s α v $\mathbf{A}_{\text{¤}}$. Pak existuje slovo u na $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ splňující $\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_u \equiv_{\text{¤}}^{+} \Delta_t^{\text{¤}}$.*

Důkaz: Když je t proměnná, pak výsledek platí podle definice. Předpokládejme $t = t_1 \cdot t_2$. Použijeme indukci podle α. Pro $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{d}_\varnothing$, výsledek plyne z lemmatu 5.33 (*ii*). Pro $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_\varnothing$ nebo $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_0$, použijeme lemma 5.33 (*iii*). Mějme nyní $\alpha = 0\beta$ s β v $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ neprázdnou. Dle definice slovo $\Delta^{\text{¤}}_t$ začíná slovem $\mathrm{sh}_0\, \Delta^{\text{¤}}_{t_1}$. Podle indukčního předpokladu je slovo $\Delta^{\text{¤}}_{t_1}$ ekvivalentní slovu $\mathtt{di}_\beta \cdot \mathtt{di}_{u'}$ pro nějaké slovo u'. Takže dostaneme $\Delta^{\text{¤}}_t \equiv^+_{\text{¤}} \mathtt{di}_\alpha \cdot \mathtt{di}_{0u'} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t_2}$. Argument je podobný pro $\alpha = 1\beta$ díky lemmatu 5.33 (*i*). ■

Následující lemma říká, že slova $\Delta^{\text{¤}}_t$ rostou s expanzemi.

Lemma 5.36 *Pokud adresa α z $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ posílá t na t', pak existuje slovo u na $\mathbf{A}_{\text{¤}}$ takové, že platí $\mathtt{di}_\alpha \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} \equiv^+_{\text{¤}} \Delta^{\text{¤}}_t \cdot \mathtt{di}_u$.*

Důkaz: Výsledek dokážeme indukcí podle α. Pro $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_\varnothing$ platí

$$\mathtt{di}_\alpha \cdot \Delta^{\text{LDI}}_{t'} \equiv^+_{\text{LDI}} \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_t) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{LDI}}_t) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t}} \equiv^+_{\text{LDI}} \Delta^{\text{LDI}}_t \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t}} .$$

Pro $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{i}_0$ a $t = t_1 \cdot t_2$ platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{di}_\alpha \cdot \Delta^{\text{LDLI}}_{t'} &\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_0 \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1 \cdot t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDLI}} t_2}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_0 \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDLI}} t_2}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDLI}} t_2}} && \text{(I, DI)}\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{LDLI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDLI}} t_2}} \cdot \Pi_{\beta \in \mathrm{Out}(\partial_{\text{LDLI}} t_2)}(\mathtt{i}_{\beta 0} \cdot \mathtt{d}_{\beta 0 \delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.32)}\\
&\equiv^+_{\text{LDLI}} \Delta^{\text{LDLI}}_t \cdot \Pi_{\beta \in \mathrm{Out}(\partial_{\text{LDLI}} t_2)}(\mathtt{i}_{\beta 0} \cdot \mathtt{d}_{\beta 0 \delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}}). && \text{(L 5.33)}
\end{aligned}$$

Předpokládejme $\mathtt{di}_\alpha = \mathtt{d}_\varnothing$ a $t = t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)$. platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{d}_\alpha \cdot \Delta^{\text{¤}}_{t'} &= \mathtt{d}_\varnothing \cdot \Delta^{\text{¤}}_{(t_1 \cdot t_2)\cdot(t_1 \cdot t_3)} \\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1 \cdot t_2}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\text{¤}}_{t_1 \cdot t_3}) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}}(t_1 \cdot t_3)}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{00}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2}} \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{LDLI}}_{t_3}) \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{¤}} t_3}} && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{01}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{¤}}_{t_3}) \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2}} \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{¤}} t_3}} && (\perp\text{, L0, IL0)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{¤}}_{t_3}) \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2}} \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{¤}} t_3}} && \text{(L10, IL10)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{¤}}_{t_3}) \cdot \mathtt{d}_\varnothing \cdot \mathtt{d}_{0\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2}} \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1 * \partial_{\text{¤}} t_3}} && \text{(L11, IL11)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{¤}}_{t_3}) \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2 \cdot \partial_{\text{¤}} t_3}} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \cdot \Pi(\mathtt{d}_\alpha \cdot \mathtt{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.31)}\\
&\equiv^+_{\text{¤}} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\text{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_{10}(\Delta^{\text{LDI}}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_{11}(\Delta^{\text{¤}}_{t_3}) \cdot \mathtt{d}_{1\delta_{\partial_{\text{¤}} t_3}} \\
&\qquad\qquad \cdot \mathtt{d}_{\delta_{\partial_{\text{LDI}} t_2 * \partial_{\text{¤}} t_3}} \cdot \Pi(\mathtt{d}_\alpha \cdot \mathtt{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\text{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.30)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv^+_{\maltese} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_2 \cdot t_3}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\mathrm{LDLI}}(t_2 \cdot t_3)}} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}) && \text{(L 5.33)}\\
&\equiv^+_{\maltese} \Delta^{\mathrm{LDLI}}_{t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3)} \cdot \Pi(\mathrm{d}_\alpha \cdot \mathrm{d}_{\alpha 0 \delta_{\partial_{\mathrm{LDI}} t_1}}). && \text{(L 5.33)}
\end{aligned}$$

Nyní předpokládejme $\alpha = 0\beta$ a $t = t_1 \cdot t_2$. Poněvadž $\mathtt{i}_\beta$ posílá t_1 na nějaký term, řekněme t_1', platí $\mathtt{i}_\beta \cdot \Delta^{\maltese}_{t_1'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_{t_1} \cdot \mathtt{di}_{u'}$ pro nějaké slovo u'. Takže platí

$$\begin{aligned}
\mathtt{i}_\alpha \cdot \Delta^{\maltese}_{t'} = \mathtt{i}_{0\beta} \cdot \Delta^{\maltese}_{t_1' \cdot t_2} &= \mathtt{i}_{0\beta} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1'}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{t_2}} \cdot \Delta^{\maltese}_{t_2}\\
&\equiv^+_{\maltese} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathtt{di}_{0u'} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\maltese}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2}} && \text{(předp.)}\\
&\equiv^+_{\maltese} \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\maltese}_{t_2}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2}} \cdot \Pi(\mathtt{di}_{\beta 0 u'}) && \text{(L 5.32)}\\
&\equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_t \cdot \Pi(\mathtt{di}_{\beta 0 u'}).
\end{aligned}$$

Nakonec předpokládejme $\alpha = 1\beta$ a $t' = t_1 \cdot t_2'$. Dle předpokladu platí $\mathtt{i}_\beta \cdot \Delta^{\maltese}_{t_2'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_{t_2} \cdot \mathtt{di}_{u'}$. Nalezneme

$$\begin{aligned}
\mathtt{i}_\alpha \cdot \Delta^{\maltese}_{t'} &\equiv^+_{\maltese} \mathtt{i}_{1\beta} \cdot \mathrm{sh}_1(\Delta^{\maltese}_{t_2'}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2'}}\\
&\equiv^+_{\maltese} \mathrm{sh}_1(\Delta^{\maltese}_{t_2}) \cdot \mathtt{di}_{1u'} \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2'}} && \text{(předp.)}\\
&\equiv^+_{\maltese} \mathrm{sh}_1(\Delta^{\maltese}_{t_2}) \cdot \mathrm{sh}_0(\Delta^{\mathrm{LDI}}_{t_1}) \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2}} \cdot \mathtt{di}_{u'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_t \cdot \mathtt{di}_{u'} && \text{(L 5.30)}
\end{aligned}$$

kde rovnost $\mathtt{di}_{1u'} \cdot \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2'}} \equiv^+_{\maltese} \mathrm{d}_{\delta_{\partial_{\maltese} t_2}} \cdot \mathrm{d}_{u'}$ plyne z lemmatu 5.30, jelikož platí $t_2 \bullet (\mathtt{i}_\beta \cdot \Delta^{\maltese}_{t_2'}) = \partial_{\maltese} t_2' = t_2 \bullet (\Delta^{\maltese}_{t_2} \cdot \mathtt{di}_{u'})$, a tak platí $\partial_{\maltese} t_2' = \partial_{\maltese} t_2 \bullet \mathrm{d}_{u'}$. ■

Lemma 5.37 *Nechť je u slovo na $\mathbf{A}_{\maltese}$ a nechť DI_u posílá t na t'. Pak existuje kladné slovo u' splňující*

$$\mathtt{di}_u \cdot \Delta^{\maltese}_{t'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_t \cdot \mathtt{di}_{u'}. \tag{5.21}$$

Důkaz: Použijeme indukci podle $\lg(u)$. Pro $u = \varepsilon$ je výsledek triviální. Pro $\lg(u) = 1$ je výsledek zněním lemmatu 5.36. Předpokládejme nyní $u = u_1 \cdot u_2$, kde ani u_1 ani u_2 nejsou prázdné. Buď $t_1 = t \cdot \mathrm{DI}_u$. Dle indukčního předpokladu existují u_1' a u_2' splňující $\mathtt{di}_{u_1} \cdot \Delta^{\maltese}_{t_1} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_t \cdot \mathtt{di}_{u_1'}$ a $\mathtt{di}_{u_2} \cdot \Delta^{\maltese}_{t'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_{t_1} \cdot \mathtt{di}_{u_2'}$. Z toho odvodíme $\mathtt{di}_u \cdot \Delta^{\maltese}_{t'} \equiv^+_{\maltese} \mathtt{di}_{u_1} \cdot \Delta^{\maltese}_{t_1} \cdot \mathtt{di}_{u_2'} \equiv^+_{\maltese} \Delta^{\maltese}_t \cdot \mathtt{di}_{u_1'} \cdot \mathtt{di}_{u_2'}$. ■

V kapitole 4 jsme dokázali, že každá $\maltese$-k-expanze termu t má $\partial^k_{\maltese} t$ jako $\maltese$-expanzi. Vyjádříme nyní tento výsledek pomocí operátorů $\mathtt{di}$.

Definice: Pro každý term t položíme ${}^0\Delta^{\maltese}_t = \varepsilon$ a ${}^k\Delta^{\maltese}_t = \Delta^{\maltese}_t \cdot \Delta^{\maltese}_{\partial_{\maltese} t} \cdot \dots \cdot \Delta^{\maltese}_{\partial^{k-1}_{\maltese} t}$ pro $k \geqslant 1$.

Lemma 5.38 *Buď u slovo na $\mathbf{A}_{\maltese}$ délky nanejvýš k a buď t term z definičního oboru operátoru DI_u. Pak existuje slovo v' na $\mathbf{A}_{\maltese}$ splňující $\mathtt{di}_u \cdot \mathtt{di}_{v'} \equiv^+_{\maltese} {}^k\Delta^{\maltese}_t$.*

DŮKAZ: Použijeme indukci podle k. Pro $k=0$, je výsledek triviální. Jinak píšeme $u = u_0 \cdot \alpha$ s α v $\mathbf{A}_{\square}$. Dle indukčního předpokladu existuje kladné slovo v_0' splňující $\mathtt{di}_{u_0} \cdot \mathtt{di}_{v_0'} \equiv^+_{\square} {}^{k-1}\Delta^{\square}_t$. Buď t' obraz termu t při $\textsc{di}_{u_0}$. Dle předpokladu náleží term t' do definičního oboru termu $\textsc{di}_\alpha$, a tak podle lemmatu 5.36 existuje kladné slovo v, které splňuje $\mathtt{di}_\alpha \cdot \mathtt{di}_v \equiv^+_{\square} \Delta^{\square}_{t'}$. Použijeme lemma 5.37 na termy t' a $\partial^{k-1}_{\square} t$ a vidíme, že existuje kladné slovo v_0'', které splňuje $\mathtt{di}_{v_0'} \cdot \Delta^{\square}_{\partial^{k-1}_{\square} t} \equiv^+_{\square} \Delta^{\square}_{t'} \cdot \mathtt{di}_{v_0''}$. Vyvodíme z toho

$$
\begin{aligned}
\mathtt{di}_u \cdot \mathtt{di}_v \cdot \mathtt{di}_{v_0''} = \mathtt{di}_{u_0} \cdot \mathtt{di}_\alpha \cdot \mathtt{di}_v \cdot \mathtt{di}_{v_0''} &\equiv^+_{\square} \mathtt{di}_{u_0} \cdot \Delta^{\square}_{t'} \cdot \mathtt{di}_{v_0''} \equiv^+_{\square} \\
&\equiv^+_{\square} \mathtt{di}_{u_0} \cdot \mathtt{di}_{v_0'} \cdot \Delta^{\square}_{\partial^{k-1}_{\square} t} \equiv^+_{\square} {}^{k-1}\Delta^{\square}_t \cdot \Delta^{\square}_{\partial^{k-1}_{\square} t} = {}^{k}\Delta^{\square}_t .
\end{aligned}
$$

Takže výsledek dostaneme položením $v' = v \cdot v_0''$. ∎

Tvrzení 5.39 *Buďte u, v dvě slova na $\mathbf{A}_{\square}$ délky nanejvýš k. Pak existují slova u', v' na $\mathbf{A}_{\square}$ splňující*

$$
\mathtt{di}_u \cdot \mathtt{di}_{v'} \equiv^+_{\square} \mathtt{di}_v \cdot \mathtt{di}_{u'} \equiv^+_{\square} {}^{k}\Delta^{\square}_{t^L_{u,v}} . \tag{5.22}
$$

DŮKAZ: Podle tvrzení 5.10 průnik definičních oborů operátorů $\textsc{di}_u$ a $\textsc{di}_v$ sestává se substituentů termů $t^L_{u,v}$. Použití lemmatu 5.38 na $t^L_{u,v}$ dá dvě kladná slova u' a v' taková, že $\mathtt{di}_u \cdot \mathtt{di}_{v'}$ a $\mathtt{di}_v \cdot \mathtt{di}_{u'}$ jsou $\equiv^+_{\square}$-ekvivalentní termu ${}^{k}\Delta^{\square}_{t^L_{u,v}}$. ∎

Dokázali jsme, že relace $\equiv^+_{\square}$ popisují dostatečně dobře geometrické monoidy v tom smyslu, že výsledky dokázané pro geometrické monoidy také platí pomocí relací $\equiv^+_{\square}$. To nám umožní pracovat spíše s relacemi $\equiv^+_{\square}$ než s geometrickými monoidy a používat metody založené na prezentacích, jako třeba metodu převracení slov v příští sekci. Zakončíme tuto sekci dvěma výsledky o ekvivalenci $\equiv_{\square}$. První z nich je analogií výsledku 4.12.

Tvrzení 5.40 *Jestliže je w slovo na $\mathbf{A}^{\pm 1}_{\square}$, které obsahuje k kladných adres, a jestliže term t náleží do definičního oboru operátoru $\textsc{di}_w$, pak existuje slovo u na $\mathbf{A}_{\square}$ splňující $\mathtt{di}_w \cdot \mathtt{di}_u \equiv_{\square} {}^{k}\Delta^{\square}_t$.*

DŮKAZ: Argument je podobný tomu použitému v důkaze lemmatu 5.38. Provedeme indukci podle k. Pro $k=0$ obsahuje slovo w pouze záporné adresy a když definujeme $u = w^{-1}$, dostaneme $\mathtt{di}_w \cdot \mathtt{di}_{w'} \equiv_{\square} \varepsilon$. Předpokládejme teď $k > 0$. Píšeme $w = w_0 \cdot \alpha \cdot v_0^{-1}$, kde α je kladná adresa a v_0 kladné slovo. Dle indukčního předpokladu existuje kladné slovo u_0, které splňuje $w_0 \cdot u_0 \equiv_{\square} {}^{k-1}\Delta^{\square}_t$. Buď t' obraz termu t při $\textsc{di}_{w_0}$. Existuje kladné slovo v', které splňuje $\mathtt{di}_\alpha \cdot \mathtt{di}_{v'} \equiv^+_{\square} \mathtt{di}_{u_0} \cdot \Delta^{\square}_{\partial^{k-1}_{\square} t}$. Výsledek dostaneme položením $u = v \cdot v' \cdot u_0'$. ∎

Nakonec představíme výsledek, který říká, že dva $\square$-ekvivalentní prvky mají společnou expanzi.

Tvrzení 5.41 *Je-li w slovo na $\mathbf{A}_{¤}^{\pm 1}$ takové, že definiční obor operátoru DI_w není prázdný, pak existují slova u, v na $\mathbf{A}_{¤}$ splňující* $\mathtt{di}_w \equiv_{¤} \mathtt{di}_u \cdot \mathtt{di}_{v^{-1}}$.

DŮKAZ: Okamžitý důsledek tvrzení 5.40. ■

5.4 Syntaktický monoid

V této sekci studujeme monoid generovaný LDLI-relacemi pomocí metody prezentace s doplňky, představené v [16]. Tato metoda nám dá algoritmus pro rozhodnutí problému slov tohoto monoidu a umožňuje říct, že tento monoid je s levým krácením a že uspořádání levou dělitelností tvoří svaz. Nezabýváme se LDI-relacemi, protože jich je příliš a příslušný monoid stěží dá stejné výsledky jako monoid LDLI.

Definice [12]: Buď A abeceda. Řekneme, že f je *doplněk* na A, jestliže je f částečné zobrazení z $A \times A$ do A^* splňující $f(x, x) = \varepsilon$, pro každé x z A, a že $f(x, y)$ existuje právě tehdy, když $f(y, x)$ existuje. Označíme $\equiv_f^+$ relaci generovanou relacemi $(xf(x,y), yf(y,x))$ s (x, y) v definičním oboru zobrazení f. Monoid *příslušející f napravo* je monoid A^* faktorizovaný $\equiv_f^+$. Označíme $\equiv_f$ relaci generovanou relacemi $(xf(x,y), yf(y,x))$ s (x, y) v definičním oboru zobrazení f doplněnými relacemi (xx^{-1}, ε) a $(x^{-1}x, \varepsilon)$. Grupa *příslušející f napravo* je monoid $(A \cup A^{-1})^*$ faktorizovaný $\equiv_f$.

Definujme syntaktický monoid LDLI M_{LDLI} jako monoid $(\mathbf{A}_{\text{LDLI}}^{\pm 1})^*$ faktorizovaný LDLI-relacemi. Vidíme, že monoid M_{LDLI} přísluší jistému doplňku f napravo: máme

$$f(\mathtt{d}_\alpha, \mathtt{di}_\beta) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro } \mathtt{di}_\alpha = \mathtt{di}_\beta, \\ \mathtt{di}_\beta & \text{pro } \beta \perp \alpha \text{ nebo } \alpha 11 \sqsubseteq \beta \text{ nebo } (\beta \sqsubset \alpha \text{ a } \alpha \neq \beta 1), \\ \mathtt{i}_\beta & \text{pro } \mathtt{di}_\beta = \mathtt{i}_\beta \text{ a } (\alpha = \beta \text{ nebo } \alpha = \beta 1), \\ \mathtt{di}_{\alpha 10\gamma} \cdot \mathtt{di}_{\alpha 00\gamma} & \text{pro } \beta = \alpha 0 \gamma, \\ \mathtt{di}_{\alpha 01\gamma} & \text{pro } \beta = \alpha 10\gamma \text{ a } \beta \neq \alpha 10_{\text{I}}, \\ \mathtt{i}_{\alpha 0} & \text{pro } \beta = \alpha 10_{\text{I}}, \\ \mathtt{d}_\beta \cdot \mathtt{d}_\alpha & \text{pro } \beta = \alpha 1, \\ \mathtt{d}_\beta \cdot \mathtt{d}_\alpha \cdot \mathtt{d}_{\beta 0} & \text{pro } \alpha = \beta 1, \end{cases}$$

$$f(\mathtt{i}_\alpha, \mathtt{di}_\beta) = \begin{cases} \varepsilon & \text{pro } \mathtt{di}_\alpha = \mathtt{di}_\beta, \\ \mathtt{di}_\beta & \text{pro } \beta \perp \alpha \text{ nebo } (\beta \sqsubset \alpha \text{ a } (\alpha \neq \beta 10 \text{ nebo } \beta \in \mathbf{A}_{\text{LI}})), \\ \mathtt{di}_{\alpha 0\gamma} \cdot \mathtt{di}_{\alpha 1\gamma} & \text{pro } \beta = \alpha\gamma \text{ a } \mathtt{di}_\alpha \neq \mathtt{di}_\beta, \\ \mathtt{d}_\beta \cdot \mathtt{d}_{\beta 0} & \text{pro } \alpha = \beta 10 \text{ a } \beta \in \mathbf{A}_{\text{LD}}. \end{cases}$$

LDI-relace nedávají doplněk, protože máme například relaci $\mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}}^+ \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{i}_1$.

Prezentace s doplňky umožňují používat kombinatorickou metodu zvanou *převracení slov*. Převracení sestává z postupného nahrazování podslov $x^{-1} \cdot y$ podslovy $f(x,y) \cdot f(y,x)^{-1}$.

Definice [16]: Buďte w, w' dvě slova. Řekneme, že w se *převrací (napravo)* do w', označení $w \curvearrowright w'$, pokud existuje posloupnost slov $w = w_1, \ldots, w_k = w'$ splňující pro každé $i < k$,

$$w_i = w_i' \cdot x_i^{-1} \cdot y_i \cdot w_i'' \qquad \text{a} \qquad w_{i+1} = w_i' \cdot f(x_i, y_i) \cdot f(y_i, x_i)^{-1} \cdot w_i''$$

kde x_i a y_i jsou slova.

Vidíme, že $w \curvearrowright w'$ implikuje $w \equiv_f w'$. Takže eventuelně dostaneme převracením slovo, které je ekvivalentní slovu w a které je součinem slova kladného a slova záporného. Ale převracení není a priori deterministický proces, v každé etapě se může převrátit libovolná dvojice slov $x^{-1}y$. Přesto je tento proces konfluentní a pokud dorazíme ke slovu vu^{-1}, pak je takové slovo jednoznačné.

Tvrzení 5.42 [12] *Každé slovo w se převrací do nanejvýš jednoho slova ve tvaru $v \cdot u^{-1}$ s u a v kladnými slovy.*

Definice [12]: Buďte u a v dvě kladná slova. Definujeme $u \backslash v$ jako jediné slovo v' takové, že $v^{-1}u$ se převrací do $v'u'^{-1}$ s u' a v' kladnými, pokud takové slovo existuje.

Vidíme speciálně, že platí $x \backslash y = f(x,y)$ pro každé x, y v A. Pokud máme $u \backslash v = v \backslash u = \varepsilon$, pak platí $u \equiv_f^+ v$. Chtěli bychom, aby tato implikace byla ekvivalencí, tj. chtěli bychom mít $u \equiv_f^+ v$ právě tehdy, když platí $u^{-1}v \curvearrowright \varepsilon$.

Definice [16]: Řekneme, že komplement je *zprava homogenní*, pokud existuje zobrazení λ splňující

$$\lambda(xv) > \lambda(v), \quad \lambda(vx) \geqslant \lambda(v) \quad \text{a} \quad \lambda(u) = \lambda(v) \tag{5.23}$$

pro x v A a $u \equiv_f^+ v$ kladná slova.

Tvrzení 5.43 [16] *Buď M monoid příslušející napravo zprava homogennímu doplňku $f : A \times A \to A^*$. Pak relace $u^{-1}v \curvearrowright \varepsilon$ implikuje $u \equiv_f^+ v$ tehdy a jen tehdy, pokud je následující podmínka splněna pro všechna x, y, z v A:*

$$((x \backslash y) \backslash (x \backslash z)) \backslash ((y \backslash x) \backslash (y \backslash z)) = \varepsilon \tag{5.24}$$

Chceme dokázat, že monoid M_{LDLI} splňuje podmínky tvrzení 5.43. Začneme homogenitou doplňku f.

Lemma 5.44 *Doplněk f monoidu M_{LDLI} je zprava homogenní.*

DŮKAZ: Definujeme pro každé kladné slovo u

$$\lambda(\mathrm{di}_u) = \lg(t_u^R) - \lg(t_u^L)$$

Poněvadž $\mathrm{di}_u \equiv^+_{\mathrm{LDLI}} \mathrm{di}_v$ implikuje $\mathrm{DI}_u = \mathrm{DI}_v$, platí $t_u^L = t_v^L$ a $t_u^R = t_v^R$, a tak také $\lambda(\mathrm{di}_u) = \lambda(\mathrm{di}_v)$. Dle definice platí $t^R_{\alpha\cdot u} = t^L_{\alpha\cdot u} \bullet \alpha \bullet u$, a tak existuje substituce h splňující $t^L_{\alpha\cdot u} \bullet \alpha = (t_u^L)^h$ a $t^R_{\alpha\cdot u} = (t_u^R)^h$. Z toho odvodíme

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_u) &= \lg(t^R_{\alpha\cdot u}) - \lg(t^L_{\alpha\cdot u})\\
&= \lg(t^R_{\alpha\cdot u}) - \lg(t^L_{\alpha\cdot u} \bullet \alpha) + \lg(t^L_{\alpha\cdot u} \bullet \alpha) - \lg(t^L_{\alpha\cdot u})\\
&= \lg((t_u^R)^h) - \lg((t_u^L)^h) + \lg(t^L_{\alpha\cdot u} \bullet \alpha) - \lg(t^L_{\alpha\cdot u})\\
&> \lg((t_u^R)^h) - \lg((t_u^L)^h) \geqslant \lg(t_u^R) - \lg(t_u^L) = \lambda(\mathrm{di}_u).
\end{aligned}$$

Podobný argument ukáže $\lambda(u \cdot \alpha) > \lambda(u)$, a tak je f zprava homogenní. ∎

Tvrzení 5.45 *Doplněk f monoidu M_{LDLI} splňuje podmínku 5.24.*

DŮKAZ: Budeme nejdřív psát $\mathrm{di}_u =^\perp \mathrm{di}_v$ pro dvě kladná slova u a v, pokud se slovo v dostane z u několika nahrazeními podslova $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ slovem $\alpha_2 \cdot \alpha_1$ s $\alpha_1 \perp \alpha_2$. Máme $\lg(u) = \lg(v)$ a dokážeme indukcí podle $\lg(u)$, že platí $\mathrm{di}_u^{-1} \cdot \mathrm{di}_v \curvearrowright \varepsilon$. Pro $u = \varepsilon$ je výsledek triviální. Předpokládejme $u = \alpha \cdot u_0$. slovo v je ve tvaru $v_0 \cdot \alpha \cdot v_1$, kde každá adresa z v_0 je kolmá na α. Teď máme

$$\mathrm{di}_u^{-1} \cdot \mathrm{di}_v \curvearrowright \mathrm{di}_{u_0}^{-1} \cdot \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_\alpha^{-1} \cdot \mathrm{di}_\alpha \cdot \mathrm{di}_{v_1} \curvearrowright \mathrm{di}_{u_0}^{-1} \cdot \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_{v_1} \curvearrowright \varepsilon$$

dle indukčního předpokladu, protože platí $\mathrm{di}_{u_0} =^\perp \mathrm{di}_{v_0} \cdot \mathrm{di}_{v_1}$.

Nyní už dokážeme tvrzení. Budeme uvažovat všechny trojice di_α, di_β, di_γ z $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{LDLI}}$. Jelikož jsou LDLI-relace uzavřené na posun, můžeme předpokládat, že největší společná předpona adres α, β a γ je adresa $\varnothing$.

Případ 1. *Dva prvky si jsou rovny.* Předpokládejme $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_\beta$. Platí

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \varepsilon\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma,\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \varepsilon\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = \mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma;\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus\varepsilon = \varepsilon,\\
&(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \varepsilon;
\end{aligned}$$

a to stačí, neboť α a β hrají symetrickou roli.

Případ 2. *Jedna adresa je kolmá na největší společnou předponu obou ostatních adres.* Nechť je γ kolmá na největší společnou předponu adres α a β. V tom případě je γ také kolmá na obě ze slov $\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta$ a $\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha$. Platí

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus \mathrm{di}_\gamma = \mathrm{di}_\gamma,\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus \mathrm{di}_\gamma = \mathrm{di}_\gamma;\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \mathrm{di}_\gamma \setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha),\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \mathrm{di}_\gamma \setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha);
\end{aligned}$$

a to znovu stačí, protože α a β hrají symetrické role.

Případ 3. *Jeden z prvků je* $\mathrm{i}_\varnothing$. Předpokládejme $\mathrm{di}_\gamma = \mathrm{i}_\varnothing$. Můžeme předpokládat, že ostatní adresy jsou odlišné od $\mathrm{i}_\varnothing$, jinak jsme v případě 1. Platí

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus \mathrm{i}_\varnothing = \mathrm{i}_\varnothing,\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) = (\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus \mathrm{i}_\varnothing = \mathrm{i}_\varnothing;\\
&(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) = \mathrm{i}_\varnothing \setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) =^\perp (\mathrm{di}_{0\beta} \setminus \mathrm{di}_{0\alpha}) \cdot (\mathrm{di}_{1\beta} \setminus \mathrm{di}_{1\alpha}),\\
&(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) = (\mathrm{di}_{0\beta} \cdot \mathrm{di}_{1\beta})\setminus(\mathrm{di}_{0\alpha} \cdot \mathrm{di}_{1\alpha}) = (\mathrm{di}_{0\beta} \setminus \mathrm{di}_{0\alpha}) \cdot (\mathrm{di}_{1\beta} \setminus \mathrm{di}_{1\alpha});
\end{aligned}$$

Případ 4. *Jedna adresa je vlastní předponou největší společné předpony obou ostatních adres.* Předpokládejme, že γ je předponou největší společné předpony γ' adres α a β. Můžeme předpokládat $\mathrm{di}_\gamma = \mathrm{d}_\varnothing$, jinak jsme v případě 3.

Případ 4.1. *Adresa 0 je předponou adres α a β.* Píšeme $\alpha = 0\alpha_0$ a $\beta = 0\beta_0$. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{sh}_0(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0})\\
&=^\perp \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) \cdot \mathrm{sh}_{00}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}),\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{di}_{10\beta_0} \cdot \mathrm{di}_{00\beta_0})\setminus(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{sh}_{10}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) \cdot \mathrm{sh}_{00}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0});
\end{aligned}$$

a to znovu stačí, protože α a β hrají symetrické role.

Případ 4.2. *Adresa* 1 *je vlastní společnou předponou adres α a β.*

Případ 4.2.1. *Jeden z prvků je* i_{10}. Předpokládáme $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{i}_{10}$ a $\mathrm{di}_\alpha = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \neq \mathrm{i}_{10}$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{101\alpha_0})\setminus(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0})\setminus \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\setminus(\mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{101\alpha_0})\\
&= \mathrm{d}_0 \setminus(\mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0}) = \mathrm{di}_{001\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \setminus \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{di}_{001\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{011\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{01\alpha_0} \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.2.2. *Žádný z prvků není* i_{10}. Píšeme $\alpha = 1e\alpha_0$ a $\beta = 1e\beta_0$ s $e = 0$ nebo $e = 1$. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{\beta_0})\setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0})\setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\setminus(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{sh}_{1e}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}) = \mathrm{sh}_{e1}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0}),\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\setminus(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{e1\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{e1\alpha_0} = \mathrm{sh}_{e1}(\mathrm{di}_{\beta_0} \setminus \mathrm{di}_{\alpha_0});
\end{aligned}$$

a to stačí z důvodu symetrických rolí adres α a β.

Příklad 4.3. *Adresa* 1 *je největší společnou předponou adres* α *a* β.

Případ 4.3.1. *Adresy* α *a* β *jsou kolmé.*

Příklad 4.3.1.1 *Jeden z prvků je* i_{10}. Předpokládáme $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{i}_{10}$ a $\alpha = 11\alpha_0$. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.3.1.2 *Žádný z prvků není* i_{10}. Předpokládáme $\beta = 10\beta_0$ a $\alpha = 11\alpha_0$.

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{10\beta_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{10\beta_1} \setminus \mathrm{di}_{11\alpha_0} = \mathrm{di}_{11\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11\alpha_0} \setminus \mathrm{di}_{10\beta_0} = \mathrm{di}_{10\beta_0},\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{10\beta_0} = \mathrm{di}_{10\beta_0}\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.3.2. *Adresy* α *a* β *jsou porovnatelné.* Můžeme předpokládat, že β je vlastní předponou adresy α, takže $\mathrm{di}_\beta = \mathrm{d}_1$.

Případ 4.3.2.1 *Adresa* 10 *je předpona adresy* α.

Případ 4.3.2.1.1. *Prvek* di_α *je* i_{10}. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot((\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot(\mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_{00},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{i}_{100} \cdot \mathrm{i}_{110})\backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{i}_{010} \cdot \mathrm{i}_{110})\backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{00};\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{i}_{100} \cdot \mathrm{i}_{110}) = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{i}_{010} \cdot \mathrm{i}_{110}) = \mathrm{i}_{00} \cdot \mathrm{i}_{10},\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{i}_0 = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_{10} \cdot \mathrm{i}_{00};\\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.3.2.1.2. *Prvek* di_α *není* i_{10}. Píšeme $\alpha = 10\alpha_0$. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0})\backslash(\mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\\
&= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0}) \\
&= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0}) = \mathrm{di}_{101\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{001\alpha_0}, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{01\alpha_0} = \mathrm{di}_{101\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{001\alpha_0}; \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{01\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing;
\end{aligned}$$

Případ 4.3.2.2 *Adresa* 11 *je vlastní předpona adresy* α.

Případ 4.3.2.2.1. *Prvek* di_α *je* i_{110}. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10})\backslash \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_{10} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0) \\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot(\mathrm{d}_{01} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_{00}, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0) \\
&= \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot(\mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0 \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{00} \cdot \mathrm{d}_{01}; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{i}_{110} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0; \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{i}_{110} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot(\mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_{10}) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_{10}) \\
&= \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot((\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{d}_{01}) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0;
\end{aligned}$$

a nalezneme

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_{10}^{-1} \cdot \mathrm{d}_1^{-1} \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 &\curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_{10}^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 \\
&\curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing^{-1} \cdot \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_{01}^{-1} \cdot \mathrm{d}_{01} \cdot \mathrm{d}_0 \curvearrowright \mathrm{d}_0^{-1} \cdot \mathrm{d}_0 \curvearrowright \varepsilon.
\end{aligned}$$

Případ 4.3.2.1.2. *Prvek* di_α *není* i_{110}. Píšeme $\alpha = 11e\alpha_0$. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0, \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0 = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0; \\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{e11\alpha_0} = \mathrm{di}_{e11\alpha_0}, \\
(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\gamma \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash \mathrm{di}_{11e\alpha_0} = \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{1e1\alpha_0} = \mathrm{di}_{e11\alpha_0}; \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{di}_{11e\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing, \\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing .
\end{aligned}$$

Případ 4.3.2.3 *Adresa* α *je* 11. Všechny tři adresy náleží do $\mathbf{A}_{\mathrm{LD}}$ a to už je dokázáno v [12].

Případ 4.4. *Adresa* $\varnothing$ *je největší společná předpona adres* α *a* β. Můžeme předpokládat $\alpha \perp \beta$, jinak jsme v případě 1. Píšeme $\alpha = 0\alpha_0$.

Případ 4.4.1. *Adresa* 1 *je vlastní předpona adresy* β.

Případ 4.4.1.1. *Prvek* di_β *je* i_{10}. Platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{i}_{10} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{0\alpha_0} = \mathrm{d}_0 \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{i}_0 \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0}) = \mathrm{di}_{00\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash \mathrm{i}_0 = \mathrm{i}_0,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{i}_{10} = \mathrm{i}_0\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.4.1.2. *Prvek* di_β *není* i_{10}. Píšeme $\beta = 1e\beta_0$ a platí

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{1e\beta_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{0\alpha_0} = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= \mathrm{di}_{e1\beta_0} \backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0}) = \mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash \mathrm{di}_{e1\beta_0} = \mathrm{di}_{e1\beta_0},\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{di}_{1e\beta_0} = \mathrm{di}_{1e\beta_0}\,.
\end{aligned}$$

Případ 4.4.2. *Adresa* β *je rovna* 1. Nalezneme

$$\begin{aligned}
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{d}_1 \setminus \mathrm{d}_\varnothing = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}.\, \mathrm{d}_0,\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma) &= \mathrm{di}_{0\alpha_0} \backslash(\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}.\, \mathrm{d}_0) = \mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}.\, \mathrm{d}_0;\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_\varnothing \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash \mathrm{di}_{0\alpha_0} = (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_0)\backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0},\\
(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\beta \setminus \mathrm{di}_\alpha) &= (\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing)\backslash(\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\\
&= \mathrm{di}_{110\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{010\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{100\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{000\alpha_0};\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= (\mathrm{di}_{10\alpha_0} \cdot \mathrm{di}_{00\alpha_0})\backslash(\mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing) = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing,\\
(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\gamma)\backslash(\mathrm{di}_\alpha \setminus \mathrm{di}_\beta) &= \mathrm{d}_\varnothing \setminus \mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_\varnothing\,.
\end{aligned}$$

Případ 5. *Největší společná předpona dvou adres je předponou adresy třetí.* Předpokládejme, že největší společná předpona γ' adres α a β je předponou adresy γ. Pokud platí $\beta = \gamma'$ nebo $\gamma = \gamma'$, pak jsme v případě 4. Pokud jsou α a β kolmé pak jsme nutně v případě 1. Takže jsme uvážili všechny případy a důkaz je hotov. ∎

Z tvrzení 5.43 odvodíme:

Tvrzení 5.46 *Vztah* $\mathrm{di}_u \equiv^+_{\text{LDLI}} \mathrm{di}_v$ *je ekvivalentní vztahu* $\mathrm{di}_v^{-1} \cdot \mathrm{di}_u \curvearrowright \varepsilon$.

Každý monoid, který splňuje podmínky tvrzení 5.43 má dobré vlastnosti:

Tvrzení 5.47 *Monoid M_{LDLI} je s levým krácením a uspořádání levou dělitelností na M_{LDLI} tvoří svaz.*

DŮKAZ: V [12] je dokázáno, že každý monoid, který splňuje podmínky tvrzení 5.43 je s levým krácením, dva prvky mají jediného největšího společného levého dělitele a dva prvky, které mají společný pravý násobek, mají už jediný nejmenší společný pravý násobek. Podle tvrzení 5.40 má každá dvojice prvků z M_{LDLI} společný pravý násobek, a tak uspořádání levou dělitelností na M_{LDLI} tvoří svaz. ■

Poznámka 5.48 Nemůže platit $\mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{i}_{00} \cdot \mathtt{i}_0 \equiv^+_{\text{LDLI}} \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{i}_0 \cdot \mathtt{d}_0$, protože platí $\mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_0 \neq \mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{D}_0$: operátor $\mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_0$ posílá $(x \cdot y) \cdot z$ na $(((x \cdot x) \cdot y) \cdot ((x \cdot x) \cdot y)) \cdot z$ a operátor $\mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{D}_0$ posílá $(x \cdot y) \cdot z$ na $(((x \cdot y) \cdot x) \cdot ((x \cdot y) \cdot y)) \cdot z$. Přesto jsme v minulé sekci dokázali vztah $\mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{I}_0 \bullet \mathrm{D}_0$. Takže kanonická projekce z M_{LDLI} na $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$ není izomorfismus.

Nyní už vidíme, proč jsme definovali LDLI-relace tak, jak jsme je definovali. Monoid M_{LDLI} je větší než monoid $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$ a přesto si zachoval všechny dobré vlastnosti monoidu $\mathcal{G}^+_{\text{LDLI}}$. A navíc je s levým krácením a je dost pravděpodobné, že jeho podílová grupa nebude „příliš daleko“ od monoidu $\mathcal{G}_{\text{LDLI}}$. Což není pravda v případě LDI, protože se dá snadno dokázat, že platí $\mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_0$:

$$\mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{d}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_\varnothing \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_1^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing^{-1} \cdot \mathtt{i}_\varnothing \cdot \mathtt{i}_1 \cdot \mathtt{i}_0 \equiv_{\text{LDI}} \mathtt{i}_0 \,.$$

Takže relace $\equiv_{\text{LDI}}$ má daleko k tomu, aby mohla dobře popsat monoid $\mathcal{G}_{\text{LDI}}$.

V [12] bylo jedno z řešení, jak rozhodnout, jestli jsou dva termy LD-ekvivalentní, odvozeno použitím syntaktického monoidu LD. Toto řešení sestávalo z nalezení prostého zobrazení z množiny tříd LD-ekvivalence do podílové grupy syntaktického monoidu. Možná, že podobné řešení existuje také pro LDLI a to by umožnilo rozhodnout problém slov pro LDLI, ale také pro LDI, podle tvrzení 5.25.

Kapitola 6

Konstrukce LDLI grupoidů

V této kapitole studujeme levodistributivní levoidempotentní grupoidy. Dokážeme, že každý LDLI grupoid má kanonickou kongruenci, jejíž faktor je idempotentní grupoid. Tato kongruence umožňuje konstrukci LDLI grupoidů pomocí LDI grupoidů a grupoidů pravých konstant. Poté použijeme tuto metodu pro konstrukci volných LDLI grupoidů a pro charakterizaci variety LDLI grupoidů.

V sekci 1 představíme kongruenci na každém LDLI grupoidu, jejíž faktor je LDI grupoid. V sekci 2 nalezneme konstrukci založenou na této kongruenci. Pak dodáme aplikaci této konstrukce. V sekci 3 sestrojíme kandidáty na volné LDLI grupoidy a dokážeme, že je jejich volnost je ekvivalentní tvrzení, že LDLI-ekvivalence je průnikem LDI-ekvivalence a ekvivalence pravých konstant.

6.1 Idempotentní kongruence na LDLI grupoidech

V této sekci definujeme kongruenci ip_G a dokážeme, že její faktor je LDI grupoid. Pokud neuvedeme jinak, bude každý uvažovaný grupoid v této kapitole s binární operací $\cdot$. Začneme dvěma lemmaty o LI grupoidech. Píšeme abc pro $a \cdot (b \cdot c)$ a a^k pro $a \cdot a^{k-1}$.

Lemma 6.1 *Buď G LI grupoid a buď a v G. Pak platí pro všechna a, b v G,*

$$a^k b = ab \qquad \text{a} \qquad (a^k)^l = a^{k+l-1}. \tag{6.1}$$

Důkaz: Dokážeme nejdříve $a^k b = ab$ pro všechna a, b v G. Výsledek je evidentní pro $k = 1$. Pro $k > 1$ platí

$$a^k b = (a \cdot a^{k-1})b = (a^{k-1} \cdot a^{k-1})b = a^{k-1}b = ab.$$

Dokážeme nyní ten druhý výsledek, a to indukcí podle l. Poněvadž platí pro $l = 1$, předpokládáme $l > 1$. Platí

$$(a^k)^l = (a^k) \cdot (a^k)^{l-1} = a \cdot a^{k+l-2} = a^{k+l-1},$$

a to je to, co jsme chtěli dokázat. ■

Definice: Buď G grupoid. Definujeme ip_G jako nejmenší ekvivalenci na G, která splňuje $(a, a^2) \in ip_G$.

Lemma 6.2 *Buď G LI grupoid. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní pro dva prvky a, b v G :*
(i) platí $(a, b) \in ip_G$;
(ii) existují kladná čísla k, l splňující $a^k = b^l$.

Důkaz: $(i) \Rightarrow (ii)$: Vztah $(a, b) \in ip_G$ implikuje existenci posloupnosti $a = a_0, \ldots, a_n = b$, takové, že platí $a_i = a_{i-1}^2$ nebo $a_i^2 = a_{i-1}$ pro každé i mezi 1 a n. Dokážeme indukcí podle n, že existují kladná čísla k, l splňující $a^k = b^l$. Výsledek je evidentní pro $n = 0$. Předpokládejme $n \geqslant 1$. Indukční předpoklad říká, že existují čísla k', l' splňující $a^{k'} = a_{n-1}^{l'}$. Máme teď dvě možnosti:
- pro $b^2 = a_{n-1}$ platí $b^{l'+1} = (b^2)^{l'} = a_{n-1}^{l'} = a^{k'}$;
- pro $b = a_{n-1}^2$ platí $b^{l'} = (a_{n-1}^2)^{l'} = (a_{n-1}^{l'})^2 = (a^{k'})^2 = a^{k'+1}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Evidentní. ■

Stejně jako v případě svazů definujeme kongruenci a jednoduchý grupoid.

Definice: Buď $(G, \cdot)$ grupoid. Ekvivalence θ na G se nazývá *kongruence,* pokud splňuje následující podmínky:

$$\text{z } (a, b) \in \theta \text{ a } (c, d) \in \theta \text{ vyplývá } (a \cdot c, b \cdot d) \in \theta. \tag{6.2}$$

Grupoid G je *jednoduchý,* pokud má pouze dvě kongruence, a to id_G a $G \times G$.

Příklad 6.3 Relace ip_G není obecně kongruencí, například

$\cdot$	0	1	2
0	1	0	2
1	1	0	2
2	1	2	2

je LI grupoid, který je jednoduchý: pokud máme $(0, 1) \in \theta$, pak platí $(2 \cdot 0, 2 \cdot 1) \in \theta$ a pokud máme $(2, a) \in \theta$ s a v $\{0, 1\}$, pak platí $(a \cdot 2, a \cdot a) \in \theta$. Přesto je ekvivalence ip_G netriviální.

Naproti tomu, pokud je G LDLI grupoid, pak je relace ip_G kongruencí.

Tvrzení 6.4 *Pro každý LDLI grupoid G je relace ip_G kongruence a pro všechna a, b, c v G s $(a, b) \in ip_G$ platí $ac = bc$.*

DŮKAZ: Uvažujme $(a, b) \in ip_G$. Existují k, l splňující $a^k = b^l$. Nyní pro každé c v G platí

$$a \cdot c = a^k \cdot c = b^l \cdot c = b \cdot c$$

$$(c \cdot a)^k = c \cdot a^k = c \cdot b^l = (c \cdot b)^l.$$

To implikuje, že ip_G je kongruence. Výsledek, že $(a, b) \in ip_G$ dává $ac = bc$ pro každé c v G, je teď evidentní. ∎

Je snadné nahlédnout, že pro LDLI grupoid G je faktor G/ip_G LDI grupoid a že všechny třídy ekvivalence splňují identitu pravých konstant

$$x \cdot z = y \cdot z. \tag{RC}$$

Navíc prvky těchto tříd splňují $a^k = b^l$.

Příklad 6.5 Mějme následující LDLI grupoid:

$\cdot$	0	1	2	3
0	1	1	3	2
1	1	1	3	2
2	3	3	2	1
3	2	2	1	3

Kongruence ip_G má tři třídy ekvivalence: $\{0, 1\}$, $\{2\}$ a $\{3\}$. Faktor je izomorfní jediné levodistributivní kvazigrupě o třech prvcích.

Poznámka 6.6 Kepka a Němec [37] dokázali tvrzení 6.4 pro G LDLI grupoid s levým krácením. Dokázali také, v případě LD grupoidů s levým krácením, že je identita LI ekvivalentní identitě

$$xx \cdot x = xx. \tag{6.3}$$

Tento výsledek neplatí obecně pro LD grupoidy, které nejsou s levým krácením, vidíme následující protipříklad, který je LD, splňuje zmíněnou identitu, ale není LI, protože platí $(1 \cdot 1) \cdot 0 \neq 1 \cdot 0$:

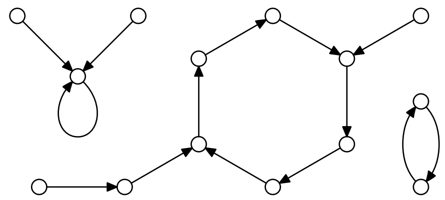
$\cdot$	0	1	2
0	1	2	2
1	1	2	2
2	2	2	2

6.2 Rozklad LDLI grupoidů

V této sekci představíme konstrukci, která umožňuje rekonstruovat LDLI grupoidy z LDI grupoidů a RC grupoidů. Pak klasifikujeme všechny jednoduché neidempotentní LDLI grupoidy. Výsledek z tvrzení 6.4 vede k následující definici:

Definice: Množina A se nazývá *monounární algebra,* pokud má jednu unární operaci α. Monounární algebra (A, α) je *souvislá,* pokud pro všechna a, b v A existují k, l splňující $\alpha^k(a) = \alpha^l(b)$.

Příklad 6.7 Každá monounární algebra (A, α) se dá zachytit orientovaným grafem Γ, jehož vrcholy jsou A a hrany vyjadřují operaci α (viz obrázek 6.1): pro každý vrchol a z A, existuje jediná hrana, která začíná v a, a to hrana z a do $\alpha(a)$. Monounární algebra je souvislá, právě tehdy, když je její graf souvislý.



Obrázek 6.1: Monounární algebra vyjádřená svým grafem

Každý RC grupoid G má přirozenou unární operaci $o_G : a \mapsto a^2$, která úplně určuje násobení na G. Z druhé strany, na každé monounární algebře můžeme vybudovat strukturu RC grupoidu. Řekneme tedy, že RC grupoid je *souvislý,* pokud je příslušná monounární algebra souvislá. Je-li G LDLI grupoid, pak jsou všechny třídy ekvivalence ip_G souvislé RC grupoidy podle tvrzení 6.4. To nám umožní nalézt rozklad grupoidu G.

Tvrzení 6.8 (i) *Buď H LDI grupoid a buď A_a, s $a \in H$, systém po dvou disjunktních množin. Předpokládejme, že existují zobrazení $f_{a,b}$ z A_b do A_{ab} pro všechna a, b v H. Definujme grupoid $B(H, f)$ jako množinu $\bigcup_{a\in H} A_a$ s operací $*$ definovanou jako $x * y = f_{a,b}(y)$ pro x v A_a a y v A_b. Pak je grupoid $B(H, f)$ LI. Navíc, pokud zobrazení $f_{a,b}$ splňují identitu*

$$f_{a,bc} \circ f_{b,c} = f_{ab,ac} \circ f_{a,c} \tag{6.4}$$

pro všechna a, b a c v H, pak je grupoid $B(H, f)$ LD.
(ii) *Buď G LDLI grupoid. Pak je G izomorfní grupoidu $B(G/ip_G, f)$, kde máme $f_{\bar{a},\bar{b}} = ac$ a $\bar{a}$ značí třídu ekvivalence ip_G, která obsahuje a.*

DŮKAZ: (i) Uvažujme libovolná a, b, c v H, a x v A_a, y v A_b a z v A_c. Prvek $x*x = f_{a,a}(x)$ náleží také do A_a, protože H je idempotentní. Takže platí $(x*x)*y = f_{a,b}(y) = x*y$. Pro levou distributivitu máme

$$x*(y*z) = x*f_{b,c}(z) = f_{a,bc}(f_{b,c}(z)) = f_{ab,ac}(f_{a,c}(z))$$
$$(x*y)*(x*z) = f_{a,b}(y)*f_{a,c}(z) = f_{ab,ac}(f_{a,c}(z))$$

a tak je $B(H,f)$ LDLI grupoid.

(ii) Všimneme si nejdřív, že definice zobrazení $f_{\bar{a},\bar{b}}$ nezáleží ani na volbě a, podle tvrzení 6.4, ani na volbě b. Nyní ověříme podmínku (6.4) pro a, b, c v G a d v $\bar{c}$:

$$f_{\bar{a},\overline{bc}}(f_{\bar{b},\bar{c}}(d)) = f_{\bar{a},\overline{bc}}(bd) = a(bd) = (ab)(ad) = f_{\overline{ab},\overline{ac}}(ad) = f_{\overline{ab},\overline{ac}}(f_{\bar{a},\bar{c}}(d)).$$

Takže tato konstrukce dává LDLI grupoid a dokážeme, že tento grupoid je izomorfní grupoidu $(G,\cdot)$. Zvolme a, b v G, c v $\bar{a}$ a d v $\bar{b}$. Platí

$$c*d = f_{\bar{a},\bar{b}}(d) = a\cdot d = c\cdot d,$$

a to končí důkaz. ■

Ve zbytku textu se každý prvek grupoidu $B(H,f)$ značí dvojicí (a,x) s a v H a x v A_a.

Zmiňme se, že pro každé a v G platí rovnost $f_{\bar{a},\bar{a}} = o_G$ na třídě ekvivalence $\bar{a}$. Když uvažujeme různá a, b v G, zobrazení $f_{\bar{a},\bar{b}}$ musí být homomorfismus: rovnost

$$f_{\bar{a},\bar{b}}(o_G(d)) = f_{\bar{a},\bar{b}}(f_{\bar{b},\bar{b}}(d)) = f_{\overline{ab},\overline{ab}}(f_{\bar{a},\bar{b}}(d)) = o_G(f_{\bar{a},\bar{b}}(d))$$

platí pro libovolné d v $\bar{b}$.

Příklad 6.9 Buď H LDI grupoid a buď A souvislý RC grupoid. Mějme pro každé a v H disjunktní kopii A značenou A_a. Definujme zobrazení $f_{a,b}$ jako $d \mapsto o_{H_b}(d)$ pro každé d v A_b. Pak platí $(a,c)*(b,d) = (ab, f_{a,b}(d)) = (ab, o_{H_b}(d)) = (ab, cd)$ a vidíme, že grupoid $B(H,f)$ je izomorfní součinu $H \times A$.

Příklad 6.10 Buď G RC grupoid. Pak je G také LDLI grupoid a platí $ab = bb$ pro všechna a a b v G a , když označíme $\bar{a}$ a $\bar{b}$ třídy ip_G, které obsahují a respektive b, platí $f_{\bar{a},\bar{b}} = f_{\bar{b},\bar{b}} = o_G$. Poněvadž existuje jediný idempotentní RC grupoid pro každou mohutnost, každý RC grupoid G je určen třídami kongruence ip_G.

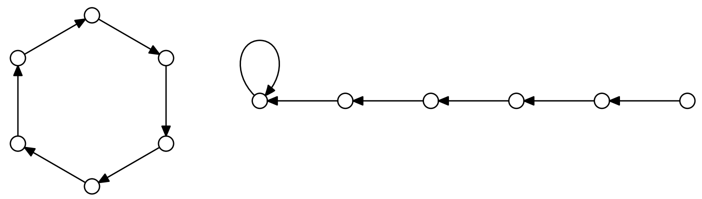
Poznámka 6.11 Podobný rozklad je popsán v [35] pro levodistributivní levosymetrické grupoidy, tzn. pro grupoidy, které splňují kromě identity LD také identitu

$$x\cdot(x\cdot y) = y. \tag{LS}$$

Je tam též dokázáno, že každý LSLD grupoid splňuje identitu LI, a tak je náš rozklad zobecněním toho pro LSLD grupoidy.

Existence kongruence ip_G umožňuje klasifikovat všechny neidempotentní jednoduché LDLI grupoidy. Tato klasifikace sice plyne z výsledků o jednoduchých LD grupoidech představených v [37], ale provedeme ji zde, protože používá jiný přístup.

Definice: Grupoid $\mathrm{Cyc}_r(n)$ s $n \geqslant 1$ je množina $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ s operací $i \cdot j = j - 1$, pro $j > 0$ a $i \cdot 0 = n - 1$.
Grupoid $\mathrm{Path}_r(n)$ s $n \geqslant 1$ je množina $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ s operací $i \cdot j = j - 1$, pro $j > 0$ a $i \cdot 0 = 0$ (viz obrázek 6.2).



Obrázek 6.2: Monounární algebry, které odpovídají grupoidům $\mathrm{Cyc}_r(6)$ (nalevo) a $\mathrm{Path}_r(6)$ (napravo).

Tvrzení 6.12 (Stanovský [45]) *Jediné jednoduché RC grupoidy jsou, až na izomorfismus, idempotentní RC grupoid o dvou prvcích,* $\mathrm{Path}_r(2)$ *a* $\mathrm{Cyc}_r(p)$ *pro p prvočíslo.*

Tvrzení 6.13 *Jediné neidempotentní jednoduché LDLI grupoidy jsou, až na izomorfismus,* $\mathrm{Path}_r(2)$ *a* $\mathrm{Cyc}_r(p)$ *pro p prvočíslo.*

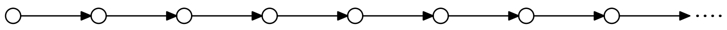
DŮKAZ: Kongruence ip_G na LDLI grupoidu G není triviální, jedině pokud je G idempotentní, anebo pokud je G souvislý RC grupoid. Jediné neidempotentní jednoduché RC grupoidy jsou podle tvrzení 6.12, grupoidy $\mathrm{Path}_r(2)$ a $\mathrm{Cyc}_r(p)$.

■

6.3 Volné LDLI grupoidy

V této sekci se pokusíme sestrojit volné LDLI grupoidy pomocí konstrukce z tvrzení 6.8. Nebudeme umět dokázat, že jsou tyto grupoidy volné, ale jejich volnost budeme charakterizovat pomocí ekvivalentních podmínek. Začneme jednogenerovanými LDLI grupoidy. Je zřejmé, že každý jednogenerovaný LDLI grupoid je souvislý RC grupoid. Existuje, až na izomorfismus, právě jeden nekonečný jednogenerovaný RC grupoid: množina $\mathbb{N}$ s operací $a \wedge b = b + 1$ (viz obrázek 6.3). Takže odvodíme:

Lemma 6.14 *Grupoid* $(\mathbb{N}, \wedge)$ *je izomorfní volnému jednogenerovanému LDLI a také volnému jednogenerovanému RC grupoidu.*



Obrázek 6.3: Jednogenerovaný nekonečný LDLI grupoid

Začneme teď sestrojovat LDLI grupoidy o více generátorech, které budou asi volné. V kapitole 5 jsme v tvrzení 5.25 dokázali (až na jednu domněnku), že dva termy jsou LDLI-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud jsou LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku. Nyní dokážeme stejnou větu pro druhé mocniny.

Lemma 6.15 *Buďte t a t' dva LDI-ekvivalentní termy, které mají stejnou pravou výšku. Pak jsou termy $t \cdot t$ a $t' \cdot t'$ LDLI-ekvivalentní.*

DŮKAZ: Termy $t \cdot t$ a $t' \cdot t'$ jsou LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku. Podle lemmatu 5.22 existuje slovo w na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}$ a číslo k splňující $t \cdot t \bullet \mathrm{I}_\varnothing^k \bullet \mathrm{DI}_w \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k} = t' \cdot t'$. Dokážeme výsledek indukcí podle k. Pro $k = 0$ je výsledek triviální.

Předpokládejme $k > 0$. Platí $t \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_w \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k-1} = t'$. Nyní necháme zmizet všechny výskyty operátoru $\mathrm{D}_\varnothing$ z w. Pohledem na LDI-relace si všimneme, že můžeme přesunout všechny $\mathrm{D}_\varnothing$ na levý kraj slova w a všechny $\mathrm{D}_\varnothing^{-1}$ na pravý kraj slova w. Nyní platí

$$\mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{D}_\varnothing = \mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_{00} \bullet \mathrm{I}_{10}$$

poněvadž oba operátory posílají každý term t na term $((t \cdot t) \cdot t) \cdot ((t \cdot t) \cdot t)$. Takže existuje slovo w_1 na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDI}}$ a slovo w_2 na $\mathbf{A}_{\mathrm{LDLI}}$ splňující

$$t \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_1} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k-1} = t'.$$

Nyní slovo w_1 stejně jako slovo w_2 posílají term $t \bullet \mathrm{I}_\varnothing^k$ na term $t' \bullet \mathrm{I}_\varnothing^k$. Takže také platí

$$t \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_2} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k-1} = t'.$$

Ale platí

$$\mathrm{I}_\varnothing^{k+1} \bullet \mathrm{DI}_{0w_2} \bullet \mathrm{DI}_{1w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k-1} = \mathrm{I}_\varnothing^{k} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k-1} = \mathrm{I}_\varnothing^{k} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k}.$$

Takže operátor $\mathrm{I}_\varnothing^{k-1} \bullet \mathrm{DI}_{w_2} \bullet \mathrm{I}_\varnothing^{-k+1}$ posílá term $t \cdot t$ na term $t' \cdot t'$ a zbytek plyne z indukce. ∎

Sestrojíme potenciálně volné LDLI grupoidy z volných LDI grupoidů a z grupoidu $(\mathbb{N}, \wedge)$. Třída LDLI-ekvivalence termu t bude kódována dvojicí – jedním prvkem volného LDI grupoidu, a to třídou LDI-ekvivalence prvku t a číslem z $\mathbb{N}$, které bude vyjadřovat rozdíl mezí pravou výškou termu t a nejmenší pravou výškou ve třídě LDI-ekvivalence.

Označíme FLDI_X volný LDI grupoid generovaný množinou X, tj. množinu T_X faktorizovanou $\stackrel{\mathrm{LDI}}{=}$, a označíme $[t]$ třídu ekvivalence $\stackrel{\mathrm{LDI}}{=}$ obsahující prvek t. Definujeme pravou výšku každého prvku $[t]$ z FLDI_X jako nejmenší pravou výšku termu t', který je LDI-ekvivalentní prvku t. Uvažujme nyní, pro každé $[t]$ v FLDI_X, disjunktní kopii grupoidu $(\mathbb{N}, \wedge)$, značenou $\mathbb{N}_{[t]}$. Pro všechna $[t], [s]$ v FLDI_X, definujeme $f_{[t],[s]}(a) = a + \mathrm{rht}([s]) - \mathrm{rht}([t \cdot s]) + 1$. Platí $f_{[t],[s]}(a) \geqslant a$ pro každé a v $\mathbb{N}$, a tak je $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ LI grupoid.

Lemma 6.16 *Grupoid $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ definovaný výše je LDLI grupoid.*

DŮKAZ: Je třeba dokázat, že se jedná o LD grupoid, tzn., že zobrazení $f_{a,b}$ splňují podmínku (6.4). Pro termy t_1, t_2, t_3 a každé a v $\mathbb{N}$, platí:

$$\begin{aligned} f_{[t_1],[t_2 \cdot t_3]} \circ f_{[t_2],[t_3]}(a) &= f_{[t_1],[t_2 \cdot t_3]}(a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_2 \cdot t_3]) + 1) \\ &= a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_2 \cdot t_3]) + 2 \\ &= a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([(t_1 \cdot t_2) \cdot t_1 \cdot t_3]) + 2, \\ &= f_{[t_1 \cdot t_2],[t_1 \cdot t_3]}(a + \mathrm{rht}([t_3]) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_3]) + 1) \\ &= f_{[t_1 \cdot t_2],[t_1 \cdot t_3]} \circ f_{[t_1],[t_3]}(a) \end{aligned}$$

a tak je grupoid $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ LDLI. ■

Neumíme dokázat, že je tento grupoid volný, ale umíme tuto vlastnost vyjádřit jinak:

Tvrzení 6.17 *Buď X množina proměnných. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*
(i) Dva termy t a t' jsou LDLI-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud jsou LDI-ekvivalentní a mají stejnou pravou výšku.
(ii) Grupoid $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$ je izomorfní volnému grupoidu generovanému X.
(iii) Nechť je G volný grupoid generovaný X, pak je každá třída ekvivalence ip_G s levým krácením.
(iv) Dva termy t a t' z T_X jsou LDLI-ekvivalentní, pokud jsou termy $t \cdot t$ a $t' \cdot t'$ LDLI-ekvivalentní.
(v) Relace $\stackrel{\mathrm{LDLI}}{=}$ na T_X je průsekem relací $\stackrel{\mathrm{LDI}}{=}$ a $\stackrel{\mathrm{RC}}{=}$.

DŮKAZ: Množina T_X faktorizovaná ekvivalencí $\stackrel{\mathrm{LDLI}}{=}$ je volný LDLI grupoid na X. Označíme $\bar{t}$ třídu LDLI-ekvivalence, která obsahuje t. Definujeme zobrazení h jako $\bar{t} \mapsto ([t], \mathrm{rht}(t) - \mathrm{rht}([t]) + 1)$. Toto zobrazení je evidentně surjektivní a podle (i) je injektivní. Stačí dokázat, že se jedná o homomorfismus. Platí

$$\begin{aligned} h(t_1) * h(t_2) &= ([t_1], \mathrm{rht}(t_1) - \mathrm{rht}([t_1]) + 1) * ([t_2], \mathrm{rht}(t_2) - \mathrm{rht}([t_2]) + 1) = \\ &= ([t_1 \cdot t_2], \mathrm{rht}(t_2) - \mathrm{rht}([t_1 \cdot t_2]) + 2) = h(t_1 \cdot t_2). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Zobrazení h je tedy izomorfismus mezi volným LDLI grupoidem generovaným X a grupoidem $B(\mathrm{FLDI}_X, f)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Třídy ip_G jsou kopiemi $\mathbb{N}$, a tak jsou s levým krácením. $(iii) \Rightarrow (iv)$ Termy t a t' jsou LDI-ekvivalentní, a tak platí $t \cdot t \stackrel{\text{LDLI}}{=} t \cdot t'$. Z levého krácení dostaneme $t \stackrel{\text{LDLI}}{=} t'$. $(iv) \Rightarrow (i)$ Termy t a t' jsou LDI-ekvivalentní a podle lemmatu 6.15 platí $t \cdot t \stackrel{\text{LDLI}}{=} t' \cdot t'$. Zbytek plyne z tvrzení (iv). $(i) \Longleftrightarrow (v)$ Je snadné nahlédnout indukcí, že dva termy jsou RC-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, pokud mají stejnou pravou výšku a stejnou nejpravější proměnnou. ∎

Prozatím neumíme dokázat žádný z výsledků z tvrzení 6.17. Ty se ale, pokud jsou pravdivé, dají chápat tak, že třída LDLI grupoidů je nejmenší třídou, která obsahuje jak LDI grupoidy, tak i RC grupoidy. Dokonce jsme dokázali, že každý LDLI grupoid se dostane jako expanze LDI grupoidu RC grupoidy. RC grupoidy mají dost jednoduchou strukturu, takže studium LDLI grupoidů by mohlo být prakticky studiem LDI grupoidů; mnoho problémů může být ekvivalentních pro LDI a pro LDLI, například problém slov volných grupoidů. Dokonce už nyní, díky větě 6.15, víme, že řešení problému slov LDLI by dalo řešení problému slov pro LDI: uvažujme dva termy t, t' s $\mathrm{rht}(t) \leqslant \mathrm{rht}(t')$ a označme $k = \mathrm{rht}(t') - \mathrm{rht}(t)$; pak jsou termy $t \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}^{k+1}$ a $t' \bullet \mathrm{I}_{\varnothing}$ LDI-ekvivalentní tehdy a jen tehdy, jsou-li LDI-ekvivalentní, dle tvrzení 6.15.

Relace $\stackrel{\text{LDLI}}{=}$ je teoreticky komplikovanější než relace $\stackrel{\text{LDI}}{=}$, ale výhoda identit LDLI je, že existují přidružené struktury, které jsou výhodnější pro některé přístupy než obdobné struktury pro LDI. Studovali jsme například v kapitole 5 syntaktické monoidy a dokázali jsme, že syntaktický monoid pro LDLI má dobré vlastnosti, které nelze nalézt v podobném monoidu přidruženém identitám LDI.

Literatura

[1] G. Birkhoff: « Lattice theory », third edition; Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 25, Amer. Math. Soc.: Providence, R.I., 1967

[2] J. Birman, K. H. Ko, S. J. Lee: *A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups,* Advances in Math. **139**, 1998, 322–353

[3] A. Björner: *Orderings of Coxeter groups.* C. Greene (ed.), Cont. Math. 34, Amer. Math. Soc.: Providence, R.I., 1984, 175–195

[4] N. Bourbaki: « Groupes et algèbres de Lie, Chap. 4, 5 et 6 »; Éléments de mathématiques, Fasc. XXXIV; Hermann: Paris, 1968

[5] E. Brieskorn, K. Saito: *Artin Gruppen un Coxeter Gruppen,* Invent. Math. **17**, 1972, 245–271

[6] S. N. Burris, H. P. Sankappanavar: « A Course in Universal Algebra », Grad. texts in Math., Springer-Verlag, 1981

[7] J. W. Cannon, W. J. Floyd, W. R. Parry: « Introductory Notes to Richard Thompson's Groups », L'Enseignement Mathématique **42**, 1996, 215–256

[8] N. Caspard, C. Le Conte de Poly-Barbut, M. Morvan: *Cayley lattices of finite Coxeter groups are bounded,* preprint

[9] F. du Cloux: *A transducer approach to Coxeter groups,* J. of Symbolic Computation **27**, 1999, 1–14

[10] P. Dehornoy: *The structure group for the associativity identity,* J. of Pure and Appl. Algebra **111**, 1996, 59–82

[11] P. Dehornoy: *Gaussian groups are torsion free,* J. of Algebra **210**, 1998, 291–297

[12] P. Dehornoy: « Braids and Self-Distributivity »; Prog. in Math. **192**; Birkhäuser, 2000

[13] P. Dehornoy: *The fine structure of LD-equivalence,* Adv. in Math., **155**, 2000, 264–316

[14] P. Dehornoy: *Groupes de Garside,* Ann. Sci. Norm. Super., 2002, 267–306

[15] P. Dehornoy: *Study of an identity*, Alg. Univ. **48**, 2002, 223–248

[16] P. Dehornoy: *Complete positive group presentation,* J. of Alg. **268**, 2003, 156–197

[17] P. Dehornoy, L. Paris: *Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups,* Proc. London Math. Soc. **79-3**, 1999, 569–604

[18] V. Deodhar: *A splitting criterion for the Bruhat orderings on Coxeter groups.* Comm. in Algebra **15 (9)**, 1987, 1889–1894

[19] A. Drápal: *Finite left distributive algebras with one generator*, Journal of Pure and Appl. Alg., **121**, 1997, 233–251

[20] A. Drápal, T. Kepka, M. Musílek: *Group Conjugation has Non-Trivial LD-Identities,* Comment. Math. Univ. Carol., 1994, 596–606

[21] R. Freese, J. Ježek, J. B. Nation: « Free Lattices », Math. Surveys and Monographs 42, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1995

[22] F. A. Garside: *The braid group and other groups,* Quart. J. Math. Oxford **20**, 1969, 235–254

[23] M. Geck, G. Pfeiffer: « Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori–Hecke Algebras »; London Math. Soc. Monographs **21**; Oxford Univ. Press, 2000

[24] E. Godelle: *Parabolic subgroups of Garside groups,* preprint, arXiv GR/0402389

[25] G. Grätzer: « General lattice theory », Second ed., Birkhäuser Verlag, Basel, 1998

[26] G. Grätzer, E. T. Schmidt: *Finite Lattices with Isoform Congruences,* Tatra Mountain Math. Publ. **27**, 2003, 111-124

[27] J. E. Humphreys: « Reflection groups and Coxeter groups »; Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1976

[28] P. Jedlička: *Prezentace s doplňky a levá distributivita,* diplomová práce, Univerzita Karlova; Praha, 2001

[29] P. Jedlička: *A Combinatorial Construction of the Weak Order of a Coxeter Group,* přijato do Comm. in Alg.

[30] P. Jedlička: *On Left Distributive Left Idempotent Groupoids*, přijato do Comm. Math. Univ. Carol.

[31] P. Jedlička: *Semidirect products of lattices,* preprint

[32] P. Jipsen, H. Rose: « Varieties of Lattices », Lecture Notes in Math. **1533**, Springer-Verlag, 1992

[33] D. Joyce: *A Classifying Invariant of Knots, the Knot Quandle,* Journal of Pure and Applied Algebra **23**, 1982, 37–65

Literatura 259

[34] T. KEPKA: *Notes On Left Distributive Groupoids,* Acta Univ. Carolinae – Math. et Phys. **22.2**, 1981, 23–37

[35] T. KEPKA, *Non-idempotent left symmetric left distributive groupoids,* Commentat. Math. Univ. Carol. **35.1**, 1994, 181–186

[36] T. KEPKA, P. NĚMEC: *Semidistributive groupoids,* Rapport de recherche 1999-9, Université de Caen, 1999.

[37] T. KEPKA, P. NĚMEC: *Selfdistributive Groupoids Part A1: Non-Idempotent Left Distributive Groupoids,* Acta Univ. Carolinae - Math. et Phys. **44.1**, 2003, 3–94

[38] D. LARUE: *Left-Distributive Idempotent Algebras,* Commun. Alg. **27/5**, 1999, 2003–2009

[39] R. LAVER: *The left distributiv law and the freeness of an algebra of elementary embeddings,* Adv. in Math., **91-2**, 1992, 209–231

[40] C. LE CONTE DE POLY-BARBUT: *Sur les treillis de Coxeter finis,* Math. Inf. Sci. Hum. **125**, 1994, 41–57

[41] C. LE CONTE DE POLY-BARBUT: *Treillis de Cayley des groupes de Coxeter finis. Constructions par récurrence et décompositions sur des quotients,* Math. Inf. Sci. Hum. **140**, 1997, 11–33

[42] M. PICANTIN: *Petits groupes gaussiens,* dizertační práce, 129 stran, 2000, Caen

[43] L. PROCHÁZKA: « Algebra », Academia, 1990, Prague

[44] D. STANOVSKÝ: *Left distributive groupoids,* diplomová práce, Univerzita Karlova Praha; Praha, 2001

[45] D. STANOVSKÝ: *Homomorphic images of subdirectly irreducible algebras*, soutěžní práce, 2001,
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~stanovsk/math/publ.htm`

[46] D. STANOVSKÝ: *On Equational Theory of Group Conjugation,* odesláno do Contr. Gen. Alg. **15**, 2003

LITERATURA 261